Langere vraag over de theorie

(a) Magnetisch dipoolmoment

- Zoals het elektrisch dipoolmoment is het magnetisch dipoolmoment een vectoriële grootheid. Het magnetisch dipoolmoment wordt gedefinieerd voor een gesloten stroomvoerende lus. Als de lus een oppervlakte A heeft en er loopt een stroom I door de lus dan is het magnetisch dipoolmoment

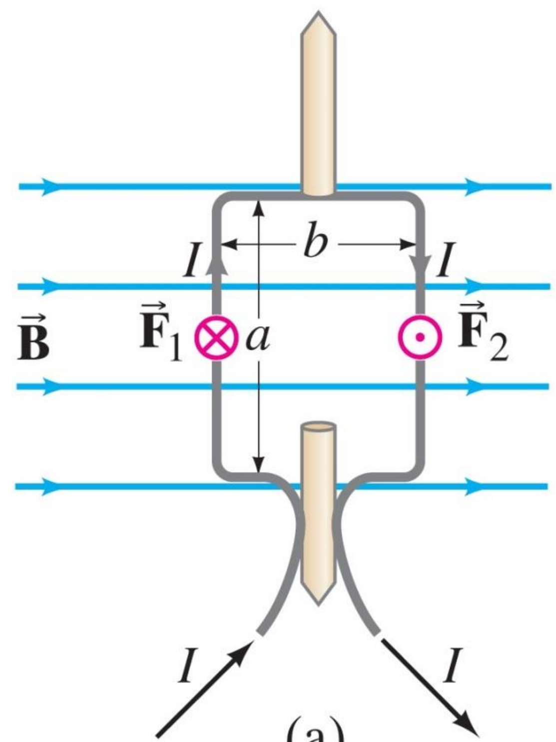
$$\vec{\mu} = I\,\vec{\mathbf{A}}$$

- De vectoren staan loodrecht op het oppervlak en hun richting wordt met behulp van de regel van de rechterhand bepaald uit de richting waarin de stroom I door de lus doorloopt. Wanneer het gaat om N dicht op mekaar liggende windingen die allen het zelfde oppervlak omsluiten, wordt het dipoolmoment verhoogd tot

$$\vec{\mu} = N I\,\vec{\mathbf{A}}$$

(b) Krachten op stroomvoerend kader

- We bekijken nu de krachten die inwerken op een rechthoekig kader met oppervlakte $a \times b$ dat kan roteren om zijn as zoals voorgesteld in figuur (a) waar de situatie wordt getoond voor het geval dat het kader evenwijdig is met het magetisch veld.
- De onder- en bovenkant van het kader ondervinden geen kracht omdat die delen van het kader evenwijdig zijn met het veld. De linker- en rechterkant van het kader ondervinden ieder een kracht $F = IaB$ voor de in figuur getoonde situatie. Als θ de hoek is tussen de veldrichting en de richting loodrecht op het kader (zie figuren (b) en (c)), dan worden de krachten oor een willekeurige oriëntatie van het kader gegeven door $F = IaB \sin\theta$ (vectorieel product).



(a)

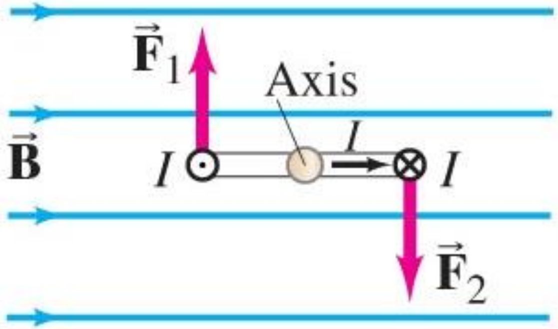
(b) Krachten op stroomvoerend kader, vervolg 1

- De tegengestelde krachten (krachtenkoppel) resulteren elk in een zelfde krachtmoment dat het kader laat roteren om zijn as. Er is dus een krachtenkoppel werkzaam met totaal krachtmoment (zie figuur (b) en (c)).

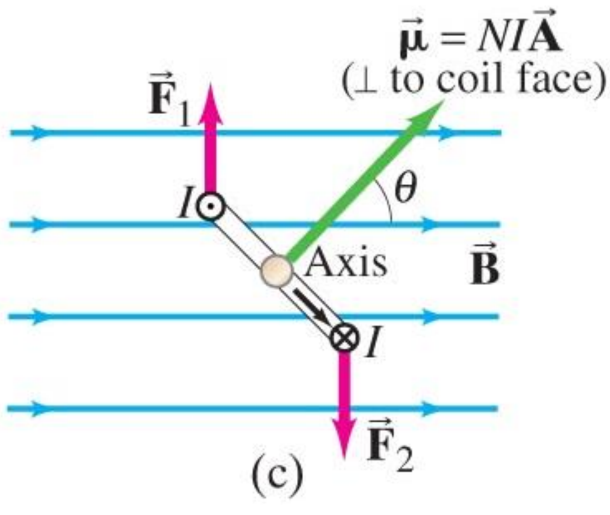
$$\tau = I\,a\,\frac{b}{2}\,B\sin\theta + I\,a\,\frac{b}{2}\,B\sin\theta = I\,a\,b\,B\sin\theta$$

- Gebruik makend van het antwoord op deel (a) van de vraag, kan dit resultaat vectorieel geschreven worden als

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\,\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}$$



(b)



(c)

(b) Krachten op stroomvoerend kader, vervolg 2

- Uitbreiden naar een kader met N windingen en verder gebruik makend van de definitie van het magnetisch dipoolmoment, kunnen we dit tenslotte herschrijven als

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = N I\, \overrightarrow{\mathbf{A}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}} = \overrightarrow{\boldsymbol{\mu}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

- Het kader ondervindt een maximaal moment als het kader evenwijdig is met het magneetveld. Het moment wordt nul voor loodrechte oriëntatie.

(c) Potentiële energie van het kader

- Daar we zoals bij de elektrische dipool te maken hebben met de werking van een moment ten gevolge van een krachtenkoppel, kunnen we op een analoge manier een potentiële energie associëren met de rotatiebeweging:

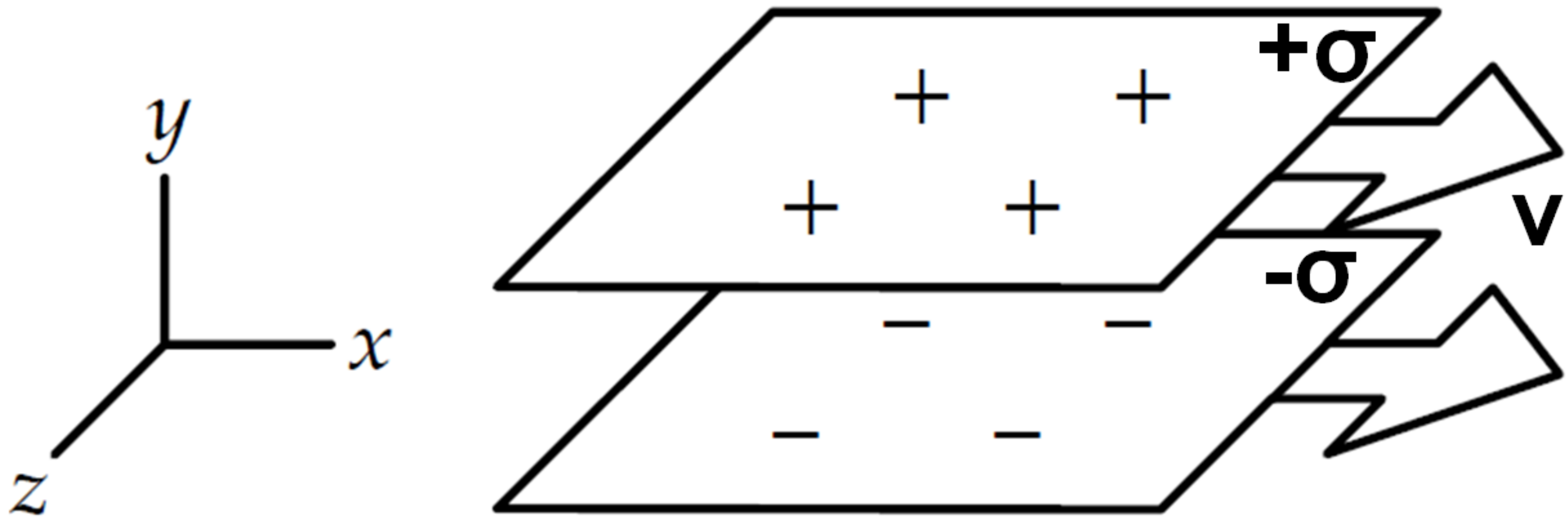
$$U = \int \tau \, d\theta = \int NIAB \sin\theta \, d\theta = -\mu B \cos\theta + C$$

- Als we opnieuw $U = 0$ nemen voor $\theta = \pi/2$ vinden we dan dat

$$U = -\vec{\boldsymbol{\mu}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$$

- De potentiële energie wordt minimaal als het kader loodrecht staat op het magnetisch veld en het dipoolmoment in dezelfde richting wijst als het magnetisch veld.

Oefening



Oplossing van de oefening

a) Bepaal de lineaire stroomdichtheid die op deze manier ontstaat in de x-richting.

Beide dunne platen vormen een pad voor een tweedimensionale stroom. In dit geval wordt de (lineaire) stroomdichtheid gegeven in A/m (de stroom per eenheid van breedte). Als we een stuk van de platen beschouwen met lengte ℓ en met breedte w, dan wordt de stroom I gegeven door ($v = \ell/t$)

$$I = \frac{q}{t} = \frac{\sigma \ell w}{t} = \frac{\sigma \ell w v}{\ell} = \sigma w v$$

De lineaire stroomdichtheid J_{lin} wordt dan gevonden door I te delen door w:

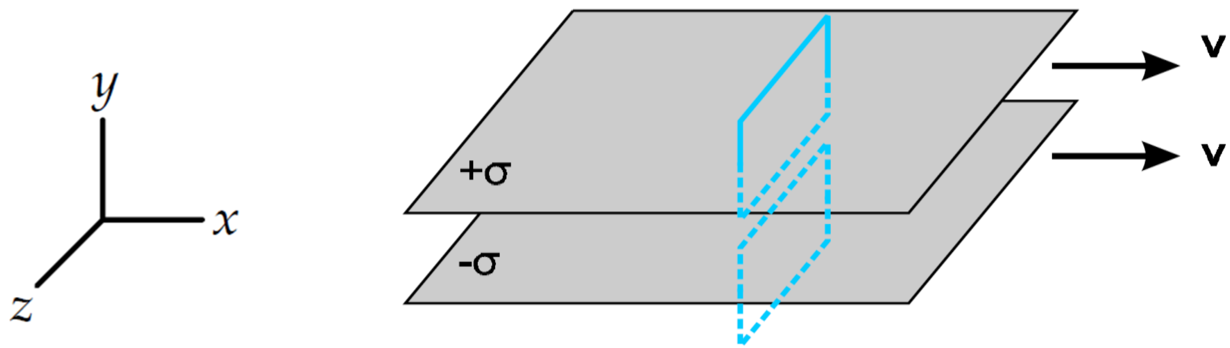
$$J_{\text{lin}} = \frac{I}{w} = \frac{\sigma w v}{w} = \sigma v$$

De stromen in de bovenste en de onderste plaat lopen in tegengestelde zin. In de bovenste plaat loopt de stroom naar rechts (in de $+x$-richting) en in de onderste plaat loopt de stroom naar links (in de $-x$-richting).

Oplossing van de oefening, vervolg 1

b) Gebruik de stroomdichtheid om aan te tonen dat het netto magneetveld tussen de platen gericht is volgens de z-as met als grootte $B = -\mu_0 \sigma v$.

Omwille van de symmetrie van het probleem (evenwijdige heel grote platen) kiezen we rechthoekige Ampèriaanse lussen zoals getoond in onderstaande figuur.



Uit de symmetrie van het probleem volgt dat het door de stroom gegenereerde magneetveld enkel een component volgens de *z*-as kan hebben (denk aan het veld veroorzaakt door een lange stroomvoerende draad). Uit de regel van de rechterhand volgt bovendien dat het veld van de bovenste plaat volgens de −*z*-richting wijst onder de plaat en volgens de +*z*-richting boven de plaat. Voor de onderste plaat is de situatie omgekeerd.

Oplossing van de oefening, vervolg 2

De wet van Ampère levert voor de Ampèriaanse lussen met breedte w evenwijdig aan de z-as dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 J_{\mathrm{lin}} w$$

Dit kunnen verder herwerken tot

$$2Bw = \mu_0 J_{\mathrm{lin}} w \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 J_{\mathrm{lin}}}{2} = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$$

En zoals hiervoor aangegeven heeft dit veld de zelfde absolute waarde voor de twee platen en is het telkens gericht volgens de $-z$-as voor het gebied tussen de twee platen. Tussen de twee platen tellen de velden op zodat het veld zoals aangegeven in de opgave inderdaad een z-component heeft gelijk aan

$$B = -2\,\frac{\mu_0 \sigma v}{2} = -\mu_0 \sigma v$$

Oplossing van de oefening, vervolg 3

c) Bepaal het magneetveld dicht bij de platen, maar aan de buitenkant van de condensator.

De wet van Ampère leert ons ook dat boven de bovenste plaat het gegenereerde veld gericht is volgens de +z-as, terwijl het veld dat gegenereerd wordt boven de onderste plaat, volgens de −z-richting gericht is. Hieruit vinden we dan dat boven de bovenste plaat de velden van de twee platen mekaar compenseren en het netto-veld is gelijk aan nul. Analoog vinden we dat beneden de onderste plaat de velden van de twee platen mekaar eveneens compenseren. De velden voor ieder van de twee platen hebben nu wel hun richting omgekeerd.

Het is belangrijk dat we steeds ver genoeg van de randen van de platen blijven teneinde de symmetrie van het probleem niet te verstoren. Dit betekent dat we ook niet te ver boven de platen mogen gaan (in vergelijking met hun laterale afmetingen) teneinde randeffecten te kunnen uitsluiten.

Oplossing van de oefening, vervolg 4

d) Wat is de grootte en richting van de magnetische kracht per eenheid van oppervlakte op de bovenste plaat?

We maken hier gebruik van het resultaat dat we in hoofdstuk 27 gevonden hebben voor de kracht op een stroomvoerende draad:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\,\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Hierbij is $\vec{\ell}$ een vector met lengte ℓ en een richting evenwijdig aan de stroom. Als we in deze uitdrukking voor de magnetische kracht het in b) gevonden magnetisch veld invullen voor de onderste plaat en gebruik maken van de in a) gevonden uitdrukking voor de stroomdichtheid, vinden we voor de absolute waarde van de kracht op de bovenste plaat:

$$F_B = (\sigma v w)\,\ell\left(\frac{\mu_0 \sigma v}{2}\right) = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}(\ell w)$$

De regel van de rechterhand leert ons dat de kracht naar boven gericht is (volgens de $+y$-as).

Oplossing van de oefening, vervolg 5

e) Bij welke snelheid *v* is de magnetische kracht op één plaat even groot als de elektrische kracht op diezelfde plaat? Druk deze snelheid uit in functie van de elementaire constanten die op pagina 1 van het formularium gegeven worden.

In hoofdstuk 21 hebben we geleerd dat de elektrische kracht gegeven wordt door

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\,\vec{\mathbf{E}}$$

Het elektrisch veld dat door de onderste plaat met negatieve lading wordt veroorzaakt ter hoogte van de bovenste plaat met positieve lading is naar beneden gericht (volgens de $-y$-as). De absolute waarde van dit veld is (op voorwaarde dat we dicht genoeg bij de plaat blijven, zie hoofdstuk 21):

$$F_E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Oplossing van de oefening, vervolg 6

De elektrische kracht op de bovenste plaat is dan ook naar beneden gericht en heeft als absolute waarde

$$F_E = qE = (\sigma w \ell)\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w)$$

Het elektrisch en het magnetisch veld dat we hier gevonden hebben, zijn de velden voor het deel van de platen met oppervlakte ℓw. Beide krachten zullen mekaar compenseren als ze de zelfde absolute waarde hebben. Dit geeft dan

$$F_B = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}(\ell w) = F_E = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Ter info: als we de waarden voor de constanten μ_0 en ε_0 invullen, dan vinden we een snelheid in de buurt van de 300.000 km/s, dit is de lichtsnelheid (zie hoofdstuk 31).

4 korte vragen

(1) Stroom tengevolge van de bewegende staaf

- We gebruiken de vergelijking voor de kracht die in het formularium staat aangegeven:

$$F = I\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

- We gebruiken eerst het tweede deel van de vergelijking om het magnetisch veld B te berekenen:

$$0{,}60 = \frac{B^2 \times 0{,}10^2 \times 2}{12}$$

- Oplossen naar B levert dan

$$B^2 = \frac{0{,}60 \times 12}{0{,}10^2 \times 2}\,\mathrm{T}^2 = 360\,\mathrm{T}^2 \qquad \Rightarrow \qquad B = \sqrt{360}\,\mathrm{T}$$

(1) Stroom tengevolge van de bewegende staaf, vervolg

- Vervolgens gebruiken we het eerste deel van de vergelijking uit het formularium:

$$I = \frac{F}{B\ell} = \frac{0{,}60}{\sqrt{360}\times 0{,}10}\ \mathrm{A} \approx \frac{6}{20}\ \mathrm{A}$$

- Hierbij hebben we de wortel uit 360 benaderd door de wortel uit 400 die gelijk is aan 20. Antwoord (a) is dus het correcte antwoord.
- Er is ook een alternatieve, kortere oplossingsmethode, waarbij men het geleverd vermogen $F \times v$ om de staaf te bewegen gelijk stelt aan de Joulse opwarming RI^2. Hieruit blijkt ook duidelijk dat de lengte van de bewegende staaf geen invloed heeft op het resultaat.

(2) Versnelling van een elektron in een magnetisch veld

- Zoals aangegeven in voorbeeld 27-7 in het handboek, gaat het hier om de centripetale kracht / versnelling tengevolge van de welke de rechte baan van het elektron afgebogen wordt tot een cirkelbeweging (cyclotronbeweging).
- We maken dan gebruik van de tweede wet van Newton waarbij we massa maal versnelling gelijk stellen aan de magnetische kracht:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = m\vec{\mathbf{a}} = -e\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

- We werken dit dan uit voor de verschillende componenten en vinden

$$a_x = -e/m\left(v_y B_z - v_z B_y\right) = 0$$

$$a_y = -e/m\left(v_z B_x - v_x B_z\right) = +\frac{e}{m} v_x B_z = -\frac{e}{m} 6.0 \times 10^6 \times 2.0$$

$$a_z = -e/m\left(v_x B_y - v_y B_x\right) = -\frac{e}{m} v_x B_y = -\frac{e}{m} 6.0 \times 10^6 \times 1{,}5$$

(2) Versnelling van een elektron in een magnetisch veld, vervolg

- We vinden dat de cyclotronbeweging gebeurt in het (y,z)-vlak. De grootte van de totale versnelling in dit vlak vinden we met behulp van de regel van Pythagoras:

$$a = \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = \frac{e}{m}\sqrt{\left(12\times10^6\right)^2 + \left(9\times10^6\right)^2} = 10^6\,\frac{e}{m}\sqrt{225}$$

$$= 15\times10^6 \times \frac{1{,}60\times10^{-19}}{9{,}11\times10^{-31}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{24}{9{,}11}\times10^{18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- We zien dan dat antwoord (c) het correcte antwoord is.

(3) Berekenen van het magnetisch veld

- Voor de berekening maken we gebruik van de wet van Biot en Savart. Voor een kwart van een cirkel werd de berekening al uitgevoerd in voorbeeld 28-13 in het handboek. Ook hier is er geen bijdrage van de horizontale en verticale rechte stukjes omdat het vectorieel product in de wet van Biot en Savart dan nul is.
- Voor de cirkel met de straal *b* vinden we (het veld wijst in het blad):

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8b}$$

- Voor de cirkel met straal *a* vinden we (het veld wijst uit het blad):

$$B = \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8a}$$

(3) Berekenen van het magnetisch veld, vervolg

- Het veld wijst netto uit het blad en heeft als absolute waarde

$$B = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \approx \frac{4\pi \times 10^{7} \times 30}{8}\left(100 - 33\right)\mathrm{T}$$

$$= 67 \times 3{,}14 \times 15 \times 10^{-7}\,\mathrm{T}$$

- We zien dan dat antwoord (d) het juiste antwoord is.

(4) Resonantiefrequentie van het LC-circuit

- Het antwoord kunnen we direct vinden door gebruik te maken van de uitdrukking voor de resonantiefrequentie (zie formularium):

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Gebruik maken van de voorhanden zijnde gegevens vinden we dan

$$\frac{10}{2\pi}\,\mathrm{kHz} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{LC} = 10^{-4}\,\mathrm{Hz}^{-1}$$

- We lossen dan op voor *L* en vinden

$$L = \frac{10^{-8}\,\mathrm{Hz}^{-2}}{10^{-6}\,\mu\mathrm{F}} = 10^{-2}\,\mathrm{H} = 10\,\mathrm{mH}$$

- Als we de spoel opvullen met magnetisch materiaal, dan wordt het geproduceerde veld 4 keer groter en de inductantie *L* wordt dus ook 4 keer groter. Uit de uitdrukking voor de resonantiefrequentie volgt dan dat deze frequentie met een factor 2 wordt verlaagd.