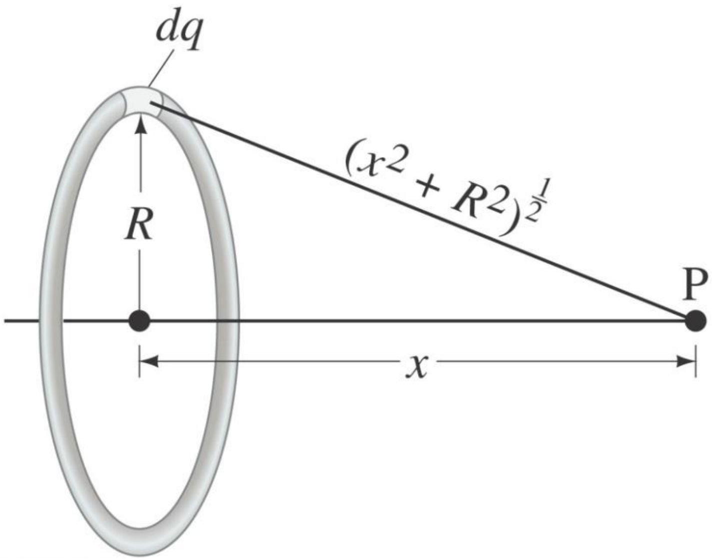
Langere vraag over de theorie

(a) Potentiaal van een uniform geladen ring

- Totale lading *Q* uniform verdeeld over de ring met straal R: $\lambda = Q/(2\pi R)$.
- Ook hier beperken we de berekening tot punten op de as loodrecht op het vlak van de ring.
- We integreren over de stukjes *dQ* die zich allemaal op gelijke afstand van punt *P* bevinden:

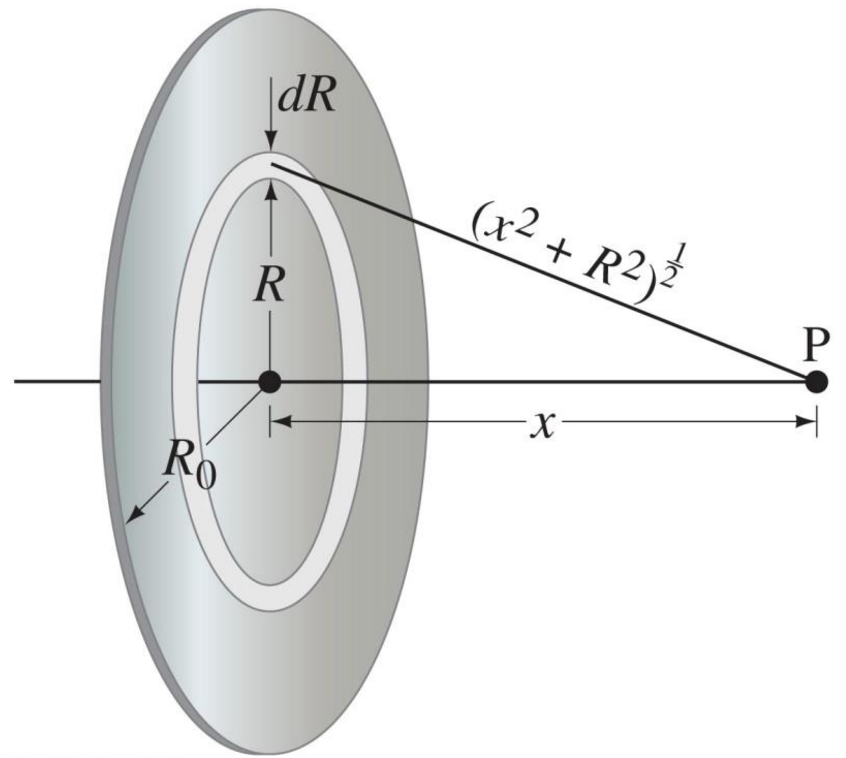


$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}\int dq$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

(b) Potentiaal van een uniform geladen schijf

- Totale lading uniform verdeeld over een schijf met oppervlakteladingsdichtheid $\sigma = Q/(\pi R_0^2)$.
- We verdelen de schijf in ringetjes met lading *dq* en straal tussen *R* en *R* + *dR*. Het verband tussen *dq* en *dR* is dan



$$\frac{dq}{Q} = \frac{2\pi R\,dR}{\pi R_0^2}$$

of

$$dq = \frac{2QR\,dR}{R_0^2}$$

(b) Potentiaal van een uniform geladen schijf, vervolg

- Gebruik makend van het resultaat voor de uniform geladen ring, levert integreren over alle stukjes *dq* dan

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}} = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R_0^2} \int \frac{RdR}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R_0^2} \left(x^2 + R^2\right)^{1/2} \Bigg|_{R=0}^{R=R_0} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R_0^2} \left[\left(x^2 + R_0^2\right)^{1/2} - x\right]$$

(c) Uitdrukking voor de elektrische velden

- We maken gebruik van het algemeen verband tussen de componenten van het veld en de potentiaal [vergelijking (23.9) in het handboek]:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- We passen dit eerst toe voor de homogeen geladen ring langsheen de as (*x*-as) loodrecht op de ring:

$$V(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

- Het veld volgens de *x*-as wordt dan gegeven door

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

(c) Uitdrukking voor de elektrische velden, vervolg

- We kijken dan vervolgens naar het geval van de homogeen geladen schijf, waarbij we de aandacht opnieuw toespitsen op de as (*x*-as) loodrecht op de schijf:

$$V(x) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R_0^2}\left[\left(x^2 + R_0^2\right)^{1/2} - x\right]$$

- We vinden dan voor het veld langs de *x*-as:

$$E_x(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R_0^2}\left[1 - \frac{x}{\left(x^2 + R_0^2\right)^{1/2}}\right]$$

- Wat betreft de richting van de elektrische velden, is er enkel een *x*-component omdat de potentialen enkel van *x* afhangen. Deze *x*-componenten wijzen telkens volgens de positieve *x*-as, dit is weg van de ladingsdichtheid als we veronderstellen dat die positief is.

Oefening

Vraag 1 :

* Alvorens de capaciteit $C(x)$ te berekenen zoeken we eerst het functioneel verband $f(s) = a s^2$:

$$f(s = l) = h \Rightarrow a l^2 = h \Rightarrow a = \frac{h}{l^2}$$

$$\Rightarrow f(s) = \left(\frac{s}{l}\right)^2 h$$

Het deel van de condensator zonder diëlektricum heeft afmetingen $x \times l$, terwijl het deel met diëlektricum afmetingen $(l-x) \times l$ heeft [laterale afmetingen!].

* De totale capaciteit $C(x) = \varepsilon_0 x l / h + C_d(x)$ omdat de condensatordelen met en zonder diëlektricum in parallel staan.

* De capaciteit van het deel met diëlektricum vinden we als de parallelschakeling van verticale reepjes met breedte ds. Ieder reepje met totale hoogte l bestaat uit de serieschakeling van condensatoren met diëlektrica K_a [hoogte is $f(s)$] en K_b [hoogte is $h - f(s)$]. De capaciteit van één enkel reepje is dan gelijk aan

$$\frac{1}{dC_d} = \frac{1}{dC_a} + \frac{1}{dC_b}$$

met
$$\begin{cases} dC_a = \dfrac{K_a \epsilon_0 \, l \, ds}{f(s)} \\[2ex] dC_b = \dfrac{K_b \epsilon_0 \, l \, ds}{h - f(s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{dC_d} = \frac{f(s)}{K_a \varepsilon_0 l \, ds} + \frac{h - f(s)}{K_b \varepsilon_0 l \, ds}$$

$$= \frac{K_b f(s) + K_a (h - f(s))}{K_a K_b \varepsilon_0 l \, ds}$$

* De capaciteit C_d van het deel met diëlektricum vinden we dan door de reepjes met capaciteit dC_d te sommeren, dit is te integreren :

$$C_d(x) = \int_0^{l-x} dC_d = \frac{K_a K_b \varepsilon_0 l \, ds}{K_b \frac{s^2}{l^2} h + K_a \left(1 - \frac{s^2}{l^2}\right) h}$$

$$= \frac{K_a K_b \varepsilon_0 l^3}{h} \int_0^{l-x} \frac{ds}{K_a l^2 - s^2 (K_a - K_b)}$$

⇒ Deze integraal kon verder uitgewerkt worden met behulp van de gekende integraal

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{constante}$$

Als het hier wat misloopt, worden hiervoor geen punten afgetrokken. De oplossing in integraalvorm is voldoende!

<u>Vraag 2</u>:

* Bij evenwicht (na voldoende lange tijd) loopt er geen stroom meer door de condensatoren in het elektrisch schema. We vinden dan dat de equivalente weerstand voor het ganse circuit gegeven wordt door $R_{eq} = R$ en de totale stroom door $I = V_{bron}/R$. Door de weer-

stand R die in parallel staat met de condensator $C_1(x)$ loopt dan de helft van die stroom dit is $V_{bron}/2R$, zodat er een potentiaalverschil $V_{bron}/2$ over de condensator $C_1(x)$ staat

$\Rightarrow$ Als er een potentiaalverschil V moet staan over de condensator $C_1(x)$ moet V_{bron} dus twee maal zo groot als V genomen worden:

$$V_{bron} = 2V$$

Vraag 3 :

* We berekenen de finale snelheid v_f als de beginsnelheid v_b is. We steunen op het behoud van energie :

$$\Delta U = -\Delta K = -\frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_b^2\right)$$

$$\Delta U = U_f - U_b = \frac{C_d(x=0)V^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 l^2 V^2}{2h}$$

Hierbij wordt $C_d(x)$ gegeven door het resultaat gevonden voor vraag 1. We maakten ook gebruik van het feit dat de energie opgeslagen in een condensator gegeven wordt door $U = CV^2/2$ en er over de condensator $C(x)$ steeds een potentiaalverschil $V = V_{bron}/2$ staat. We vinden tenslotte:

$$v_f = \left[v_b^2 - \frac{V^2}{m} \left(C_d(x=0) - \frac{\epsilon_0 l^2}{h} \right) \right]^{1/2}$$

4 korte vragen

(1) Elektrische flux door halve sfeer: antwoord is oplossing (b)

- We maken gebruik van de wet van Gauss die een algemeen verband uitdrukt tussen de netto elektrische flux doorheen een gesloten oppervlak (Gaussisch oppervlak) en de totale lading die wordt ingesloten door dit oppervlak:

$$\Phi_E = \oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0}$$

- In dit geval is het Gaussisch oppervlak een sfeer met middelpunt gelegen in het *x*-*y* vlak dat uniform geladen is. Het elektrisch veld van het uniform geladen *x*-*y* vlak (dikte gaat naar nul) wordt gegeven door

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

- Dit elektrisch veld staat loodrecht op het *x*-*y* vlak en wijst aan beide kanten weg van het vlak.

(1) Elektrische flux door halve sfeer, vervolg

- De elektrische flux door de bovenste ($z > 0$) en de onderste helft ($z < 0$) van de Gaussische sfeer is positief (wijst naar buiten ten opzichte van de sfeer) en is tevens gelijk in grootte. We passen dan de wet van Gauss toe waarbij de ingesloten lading gegeven wordt door

$$Q_{ing} = \pi r^2 \sigma = 3.14 \ (0.1)^2 10^{-8} \,\mathrm{C}$$

- De wet van Gauss levert dan voor de helft van de flux

$$\frac{\Phi_E}{2} = \frac{Q_{ing}}{2\varepsilon_0} = \frac{3.14 \ 10^{-10} \,\mathrm{C\,N\,m^2}}{2 \ 8.85 \ 10^{-12} \,\mathrm{C}^2} \approx 18 \ \frac{\mathrm{N\,m^2}}{\mathrm{C}}$$

(2) Afstand tussen geladen deeltjes: antwoord is oplossing (c)

- We maken gebruik van het behoud van energie (= kinetische energie + potentiële energie) en vergelijken de situatie in het begin (afstand tussen de deeltjes bedraagt 1m) met de situatie als het bewegende deeltje tot stilstand is gekomen, dit is vlak voor het moment dat het van het stilstaande deeltje begint weg te bewegen (dan bereikt de afstand tevens zijn minimale waarde):

$$\text{totale energie} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{k_e\, q^2}{r_0} = 0 + \frac{k_e\, q^2}{r_{\text{min}}}$$

- Zowel de kinetische energie $m v_0{}^2/2 = 10\,\text{J}$ als de afstand $r_0 = 1\,\text{m}$ en de lading $q = 10^{-4}\,\text{C}$ zijn gegeven. Uit bovenstaande vergelijking vinden we dan dat de totale energie 100J bedraagt. Hieruit kunnen we de minimale afstand r_{min} berekenen en we vinden hiervoor dan oplossing c.

(3) Onbekende weerstand bij de brug van Wheatstone

- Als de brug in evenwicht is loopt er geen stroom tussen de punten B en D zodat $V_B = V_D$. Hieruit volgt dan dat het potentiaalverschil $V_B - V_A$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_D - V_A$. We hebben daarnaast ook dat het potentiaalverschil $V_C - V_B$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_C - V_D$.
- Door toepassing van de wet van Ohm krijgen we dan volgende vergelijkingen:

$$R_1 I_1 = R_3 I_3 \quad \text{en} \quad R_2 I_1 = R_x I_3$$

- Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat dezelfde stroom I_1 loopt door de weerstanden R_1 en R_2 en dat dezelfde stroom I_3 loopt door de weerstanden R_3 en R_x. Uit twee bovenstaande vergelijkingen leiden we het gezochte resultaat af:

$$I_1 = \frac{R_3 I_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_2 \frac{R_3 I_3}{R_1} = R_x I_3 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

(4) Afschatting van de driftsnelheid van elektronen

- Eerst berekenen we de weerstand van de draad via

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

- Hierbij zijn zowel $\rho = 10^{-5}\ \Omega\,\text{cm}$ als $A = 1\ \text{mm}^2$ en $\ell = 10$ m gekend, waaruit we $R = 1\ \Omega$ vinden. Uit de wet van Ohm leren we dan dat de stroom $I = 1\ \text{V}/\Omega = 1\ \text{A}$.
- We maken vervolgens gebruik van het verband tussen de stroomdichtheid j, de dichtheid n van de vrij bewegende elektronen en de driftsnelheid v_d van deze elektronen:

$$j = \frac{I}{A} = -n e v_\text{d} \qquad \text{en} \qquad \vec{\mathbf{j}} = -n e \vec{\mathbf{v}}_\text{d}$$

- Vermits we de stroomdichtheid $j = 1\ \text{A} / 10^{-6}\ \text{m}^2 = 10^6\ \text{A/m}^2$ kennen alsook de lading $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C en de dichtheid $n = 10^{29}\ \text{m}^3$, vinden we tenslotte dat $v_\text{d} = 0.06$ mm/s.