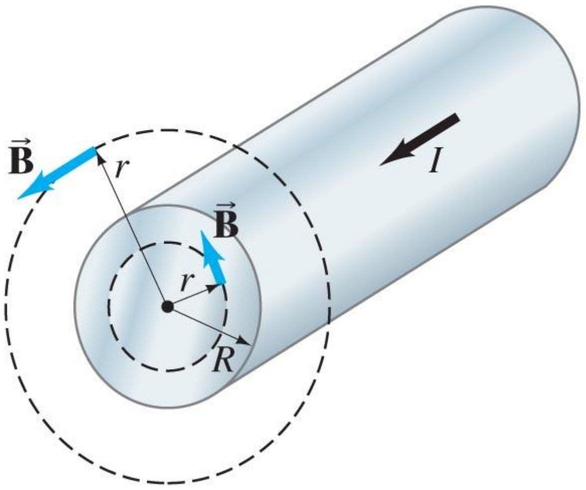
Langere vraag over de theorie

a) Veld veroorzaakt door een lange cilinder-vormige draad [voorbeeld 28-6]

- We willen het veld berekenen op een afstand r van het centrum van een draad met straal R die een constante stroom I voert en waarbij de stroom homogeen verdeeld is over de doorsnede van de draad.



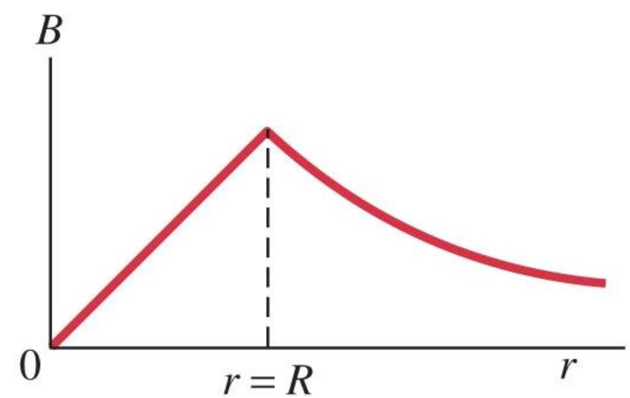
- Buiten de draad waar $r > R$ hebben we volgens de wet van Ampére:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a) Veld veroorzaakt door een lange cilinder-vormige draad [voorbeeld 28-6], vervolg

- Binnen in de draad moeten we rekening houden met de stroom I_{encl} die door een Ampèriaanse lus (= cirkel met straal r) wordt omsloten. Daar de stroom homogeen verdeeld zit over de draad, geldt dat



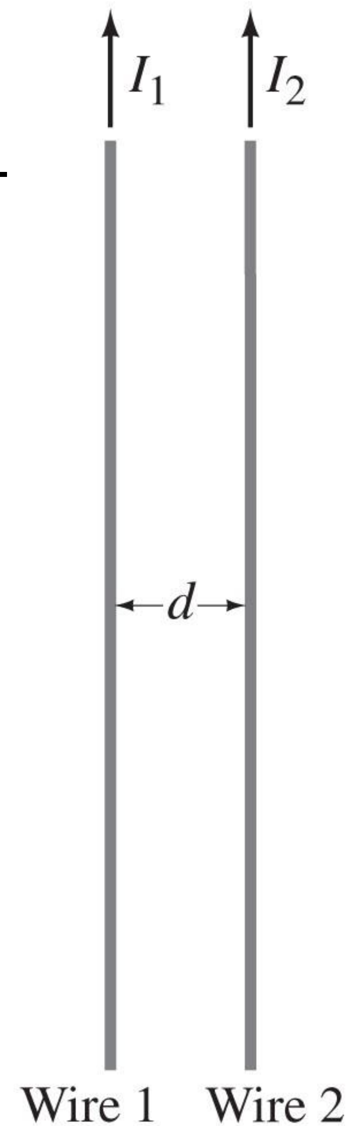
$$I_{\text{encl}} = I\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

- Toepassen van de wet van Ampére levert

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\ell} = B\left(2\pi r\right) = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 I\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

- Het veld varieert evenredig met r binnen in de draad en varieert evenredig met $1/r$ buiten de draad.

b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden



- We berekenen nu de kracht tussen twee lange evenwijdige draden waardoor een stroom loopt. Let op: deze berekening steunt op de impliciete aaname dat we geen rekening dienen te houden met de uiteinden van de draden waar de krachten inhomogeen worden (veldlijnen spreiden zich uit)! Het veld dat ter hoogte van draad 2 geproduceerd wordt door draad 1, is (zie deel a) van de vraag)

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden, vervolg 1

- Uit hoofdstuk 27 weten we dan hoe we de magnetische kracht F_2 moeten berekenen die door het veld van draad 1 wordt uitgeoefend op de stroomvoerende draad 2 met lengte ℓ_2:

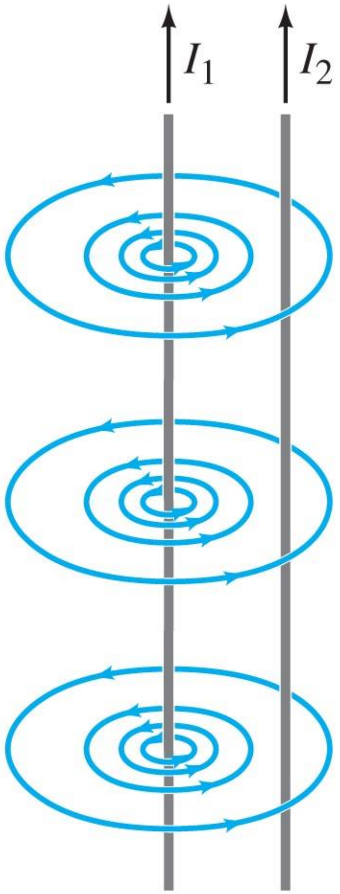
$$F_2 = I_2 B_1 \ell_2$$

- Invullen van de uitdrukking voor het magneetveld levert dan dat

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell_2}{2\pi d}$$

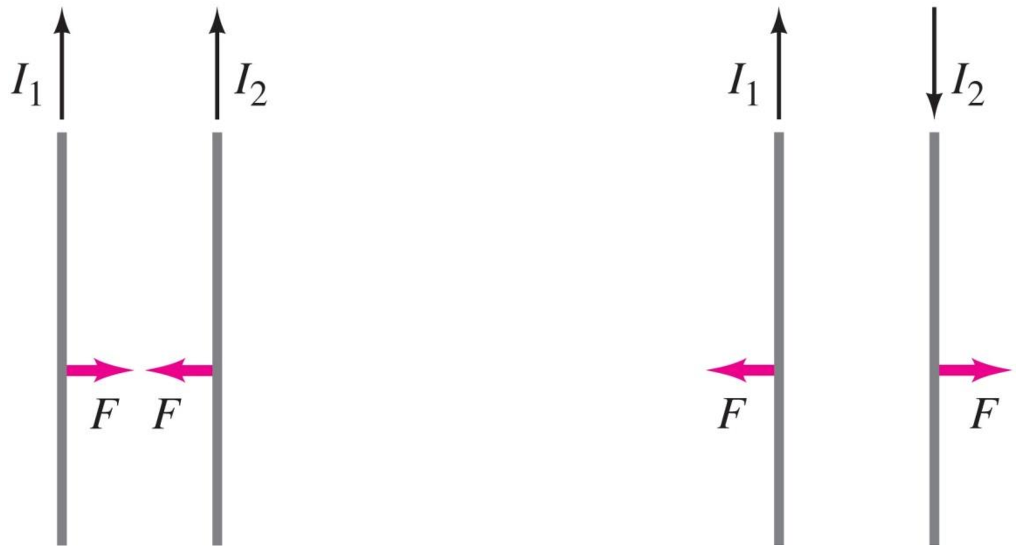
- Een analoge uitdrukking geldt voor de kracht F_1 uitgeoefend door het veld van draad 2 op draad 1:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell_1}{2\pi d}$$

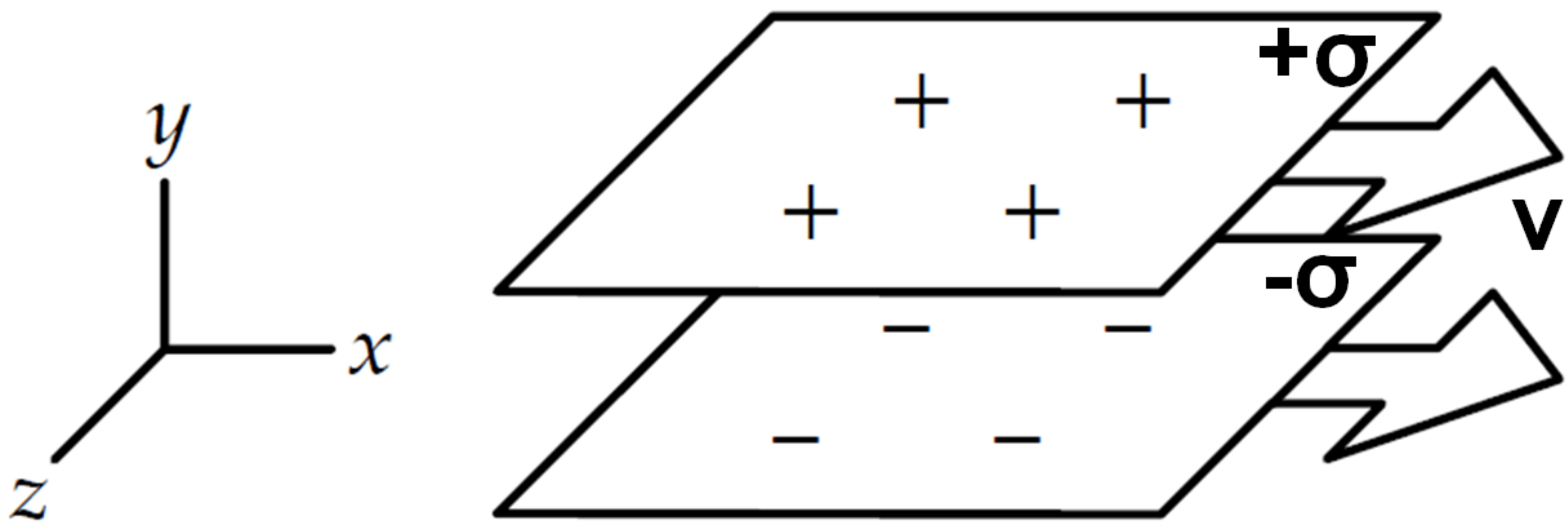


b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden, vervolg 2

- We nemen dan aan dat de twee draden even lang zijn zodat $F_1 = F_2 = F$ (consistent met de 3de wet van Newton). Met de gepaste versies van de regel van de rechterhand vinden we dan dat de krachten naar mekaar toe wijzen als de stromen in dezelfde richting lopen en dat de krachten van mekaar wegwijzen als de stromen in tegengestelde richting lopen.



Oefening



Oplossing van de oefening

a) Bepaal de lineaire stroomdichtheid die op deze manier ontstaat in de *x*-richting.

Beide dunne platen vormen een pad voor een tweedimensionale stroom. In dit geval wordt de (lineaire) stroomdichtheid gegeven in A/m (de stroom per eenheid van breedte). Als we een stuk van de platen beschouwen met lengte ℓ en met breedte w, dan wordt de stroom I gegeven door ($v = \ell / t$)

$$I = \frac{q}{t} = \frac{\sigma \ell w}{t} = \frac{\sigma \ell w v}{\ell} = \sigma w v$$

De lineaire stroomdichtheid J_{lin} wordt dan gevonden door I te delen door w:

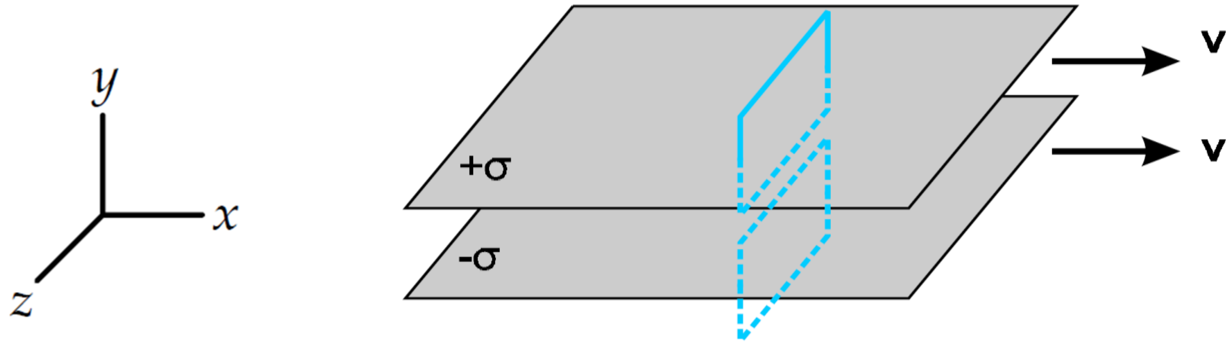
$$J_{\text{lin}} = \frac{I}{w} = \frac{\sigma w v}{w} = \sigma v$$

De stromen in de bovenste en de onderste plaat lopen in tegengestelde zin. In de bovenste plaat loopt de stroom naar rechts (in de $+x$-richting) en in de onderste plaat loopt de stroom naar links (in de $-x$-richting).

Oplossing van de oefening, vervolg 1

b) Gebruik de stroomdichtheid om aan te tonen dat het netto magneetveld tussen de platen gericht is volgens de z-as met als grootte $B = -\mu_0 \sigma v$.

Omwille van de symmetrie van het probleem (evenwijdige heel grote platen) kiezen we rechthoekige Ampèriaanse lussen zoals getoond in onderstaande figuur.



Uit de symmetrie van het probleem volgt dat het door de stroom gegenereerde magneetveld enkel een component volgens de *z*-as kan hebben (denk aan het veld veroorzaakt door een lange stroomvoerende draad). Uit de regel van de rechterhand volgt bovendien dat het veld van de bovenste plaat volgens de −*z*-richting wijst onder de plaat en volgens de +*z*-richting boven de plaat. Voor de onderste plaat is de situatie omgekeerd.

Oplossing van de oefening, vervolg 2

De wet van Ampère levert voor de Ampèriaanse lussen met breedte *w* evenwijdig aan de *z*-as dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 J_{\mathrm{lin}} w$$

Dit kunnen verder herwerken tot

$$2Bw = \mu_0 J_{\mathrm{lin}} w \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 J_{\mathrm{lin}}}{2} = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$$

En zoals hiervoor aangegeven heeft dit veld de zelfde absolute waarde voor de twee platen en is het telkens gericht volgens de −*z*-as voor het gebied tussen de twee platen. Tussen de twee platen tellen de velden op zodat het veld zoals aangegeven in de opgave inderdaad een *z*-component heeft gelijk aan

$$B = -2\,\frac{\mu_0 \sigma v}{2} = -\mu_0 \sigma v$$

Oplossing van de oefening, vervolg 3

c) Bepaal het magneetveld dicht bij de platen, maar aan de buitenkant van de condensator.

De wet van Ampère leert ons ook dat boven de bovenste plaat het gegenereerde veld gericht is volgens de +z-as, terwijl het veld dat gegenereerd wordt boven de onderste plaat, volgens de −z-richting gericht is. Hieruit vinden we dan dat boven de bovenste plaat de velden van de twee platen mekaar compenseren en het netto-veld is gelijk aan nul. Analoog vinden we dat beneden de onderste plaat de velden van de twee platen mekaar eveneens compenseren. De velden voor ieder van de twee platen hebben nu wel hun richting omgekeerd.

Het is belangrijk dat we steeds ver genoeg van de randen van de platen blijven teneinde de symmetrie van het probleem niet te verstoren. Dit betekent dat we ook niet te ver boven de platen mogen gaan (in vergelijking met hun laterale afmetingen) teneinde randeffecten te kunnen uitsluiten.

Oplossing van de oefening, vervolg 4

d) Wat is de grootte en richting van de magnetische kracht per eenheid van oppervlakte op de bovenste plaat?

We maken hier gebruik van het resultaat dat we in hoofdstuk 27 gevonden hebben voor de kracht op een stroomvoerende draad:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\,\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Hierbij is $\vec{\ell}$ een vector met lengte ℓ en een richting evenwijdig aan de stroom. Als we in deze uitdrukking voor de magnetische kracht het in b) gevonden magnetisch veld invullen voor de onderste plaat en gebruik maken van de in a) gevonden uitdrukking voor de stroomdichtheid, vinden we voor de absolute waarde van de kracht op de bovenste plaat:

$$F_B = (\sigma v\, w)\,\ell \left(\frac{\mu_0 \sigma v}{2} \right) = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2} (\ell w)$$

De regel van de rechterhand leert ons dat de kracht naar boven gericht is (volgens de $+y$-as). Dit resultaat moeten we dan nog delen door ℓw.

Oplossing van de oefening, vervolg 5

e) Bij welke snelheid *v* is de magnetische kracht op één plaat even groot als de elektrische kracht op diezelfde plaat? Druk deze snelheid uit in functie van de elementaire constanten die op pagina 1 van het formularium gegeven worden.

In hoofdstuk 21 hebben we geleerd dat de elektrische kracht gegeven wordt door

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\,\vec{\mathbf{E}}$$

Het elektrisch veld dat door de onderste plaat met negatieve lading wordt veroorzaakt ter hoogte van de bovenste plaat met positieve lading is naar beneden gericht (volgens de $-y$-as). De absolute waarde van dit veld is (op voorwaarde dat we dicht genoeg bij de plaat blijven, zie hoofdstuk 21):

$$E_E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Oplossing van de oefening, vervolg 6

De elektrische kracht op de bovenste plaat is dan ook naar beneden gericht en heeft als absolute waarde

$$F_E = qE = (\sigma w \ell)\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w)$$

Het elektrisch en het magnetisch veld dat we hier gevonden hebben, zijn de velden voor het deel van de platen met oppervlakte ℓw. Beide krachten zullen mekaar compenseren als ze de zelfde absolute waarde hebben. Dit geeft dan

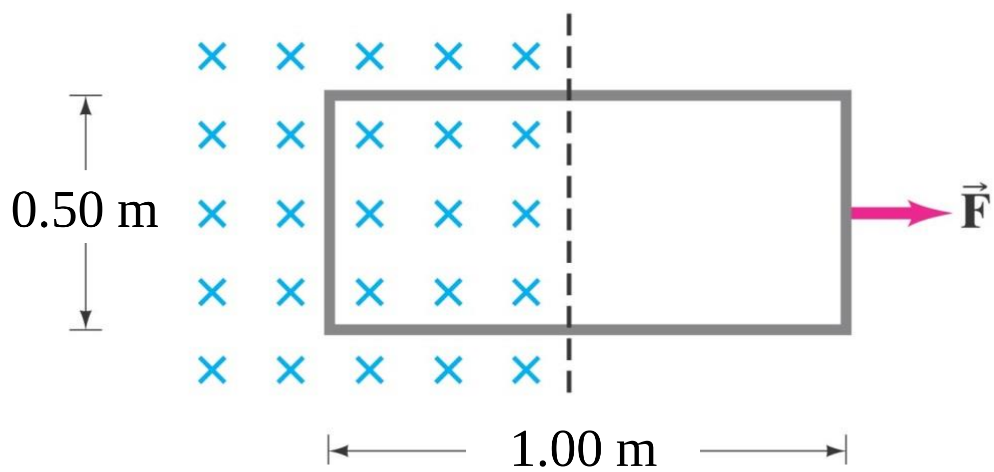
$$F_B = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}(\ell w) = F_E = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Ter info: als we de waarden voor de constanten μ_0 en ε_0 invullen, dan vinden we een snelheid in de buurt van de 300.000 km/s, dit is de lichtsnelheid (zie hoofdstuk 31).

4 korte vragen

(1) Kracht om het kader uit het magneeetveld te trekken: antwoord is oplossing (c)

Wanneer het kader uit het magneetveld wordt getrokken vermindert de magnetische flux door het kader. Hierdoor wordt er een emk geïnduceerd in het kader waarvan de grootte volgens de inductiewet van Faraday gegeven wordt door de verandering van de magnetische flux per eenheid van tijd. Omdat de flux gericht in het blad afneemt, zal de geïnduceerde flux in het blad wijzen. De geïnduceerde stroom loopt dan in uurwerkwijzerzin door het kader.



(1) Kracht om het kader uit het magneeetveld te trekken: antwoord is oplossing (c), vervolg

De geïnduceerde stroom in het verticale gedeelte van de kader aan de linkerkant resulteert in een magnetische kracht die naar links gericht is. Om het kader te laten bewegen moet er dan een even grote uitwendige kracht uitgeoefend worden naar rechts die gegeven wordt door (zie hoofdstuk 27)

$$F = I \ell B = \frac{\mathcal{E}}{R} \ell B$$

Met behulp van de inductiewet van Faraday en wat er geschreven staat op pagina 765 in het handboek kunnen we dit verder uitwerken tot het gewenste resultaat:

$$F = \frac{\mathcal{E}}{R} \ell B = \frac{B^2 \ell^2 v}{R} = \frac{(1.0\,\mathrm{T})^2 (0.5\,\mathrm{m})^2 (2.0\,\mathrm{m/s})}{0.25\,\Omega} = 2.0\,\mathrm{N}$$

(2) Versnelling van elektron in magnetisch veld: oplossing is antwoord (c)

- Zoals aangegeven in voorbeeld 27-7 in het handboek, gaat het hier om de centripetale kracht / versnelling ten gevolge van de welke de rechte baan van het elektron afgebogen wordt tot een cirkelbeweging (cyclotronbeweging).
- We maken dan gebruik van de tweede wet van Newton waarbij we massa maal versnelling gelijk stellen aan de magnetische kracht:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = m\vec{\mathbf{a}} = -e\,\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

- We werken dit dan uit voor de verschillende componenten en vinden

$$a_x = -e/m\left(v_y B_z - v_z B_y\right) = 0$$

$$a_y = -e/m\left(v_z B_x - v_x B_z\right) = +\frac{e}{m} v_x B_z = +\frac{e}{m} 6.0 \times 10^6 \times 2.0$$

$$a_z = -e/m\left(v_x B_y - v_y B_x\right) = -\frac{e}{m} v_x B_y = -\frac{e}{m} 6.0 \times 10^6 \times 1.5$$

(2) Versnelling van elektron in magnetisch veld: oplossing is antwoord (c), vervolg

- We vinden dat de cyclotronbeweging gebeurt in het (y,z)-vlak. De grootte van de totale versnelling in dit vlak vinden we met behulp van de regel van Pythagoras:

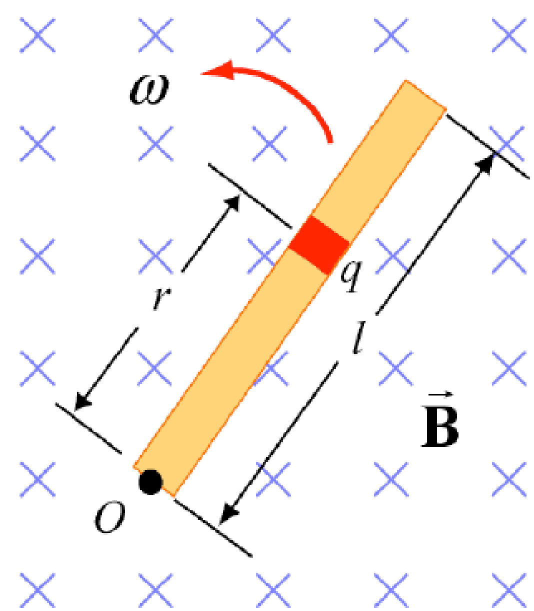
$$a = \sqrt{a_y^2 + a_z^2} = \frac{e}{m}\sqrt{\left(12\times10^6\right)^2 + \left(9\times10^6\right)^2} = 10^6\,\frac{e}{m}\sqrt{225}$$

$$= 15\times10^6 \times \frac{1.60\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = \frac{24}{9.11}\times10^{18}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

- We zien dan dat antwoord (c) het correcte antwoord is.

(3) Potentiaalverschil tussen uiteinden roterende staaf: antwoord is oplossing (b)

We gaan te werk zoals bij het bereke-nen van het potentiaalverschil tussen de uiteinden van een staaf die met een constante snelheid beweegt in een ho-mogeen magneetveld (zie het hand-boek op pagina 765). Eerst en vooral moeten we er nu echter rekening mee houden dat enkel de component van het magneetveld die loodrecht staat op de staaf, relevant is voor de magneti-sche kracht. In dit geval wordt dit veld $B_\perp = 2 \times \cos 60° \text{ mT} = 1 \text{ mT}$.



Bovendien is voor de roterende staaf de magnetische kracht op de elektronen niet constant over de lengte van de staaf en moeten we het

(3) Potentiaalverschil tussen uiteinden roterende staaf: antwoord is oplossing (b), vervolg

het lokale elektrische veld integreren over de lengte van de staaf (zie figuur, we kijken enkel naar de grootte van de kracht):

$$V = \int_0^{\ell} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\ell} E\,dr = \int_0^{\ell} v(r) B\,dr = \int_0^{\ell} r\omega B\,dr$$

$$= \omega B \int_0^{\ell} r\,dr = \frac{\omega B \ell^2}{2} = \frac{10\times 10^{-3}\times 1.0\times 1.0}{2}\ \mathrm{V} = 5.0\,\mathrm{mV}$$

(4) Waarom zijn er sterk verlaagde verliezen door Joulse opwarming bij transport via een hoogspanningsleiding?

Het loont inderdaad om met behulp van een transformator de elektrische spanning die geleverd wordt door een elektriciteitscentrale, eerst aanzienlijk op te voeren alvorens de elektrische energie over grotere afstanden te transporteren naar de verbruiker. Dat dit zo is kan begrepen worden aan de hand van de uitdrukking voor de Joulse opwarming in de spanningslijn (zie hoofdstuk 25):

$$P_{Joule} = V \times I = R \times I^2$$

De weerstand *R* van de spanningslijn wordt bepaald door de resistiviteit van het gebruikte metaal en de afmetingen. Het metaal is duur zeker als men koper met een lage resistiviteit gebruikt. Men wil dus zo weinig mogelijk metaal gebruiken en dan zal de weerstand *R* niet anders zijn als men hoogspanning of laagspanning gebruikt, met andere woorden *R* ligt vast wanneer men vermogens vergelijkt.

(4) Waarom zijn er sterk verlaagde verliezen door Joulse opwarming bij transport via een hoogspanningsleiding, vervolg

Anderzijds ligt het door de centrale geleverde vermogen P_{gel} ook vast. De stroom door de spanningslijn wordt dan gegeven door

$$I = \frac{P_{gel}}{V}$$

De Joulse opwarming wordt hiermee

$$P_{Joule} = V \times I = R \times I^2 = R \times \left(\frac{P_{gel}}{V} \right)^2$$

Dit resultaat leert ons dat de Joulse opwarming omgekeerd evenredig varieert met het kwadraat van de gebruikte spanning. Een verhoging van de spanning met een factor 100 (22 000 V in plaats van 220 V) reduceert de Joulse verliezen met een factor 10 000!