Langere vraag over de theorie

a) Bereken de energie die opgeslagen zit in een smoorspoel met inductantie *L* waardoor een stroom *I* vloeit.

b) Gebruik het resultaat van (a) om een algemene uitdrukking te bekomen voor de energiedichtheid van een magnetisch veld *B*.

a) Bereken de frequentie waarmee in een LC-kring de magnetische energie wordt omgezet in elektrische energie en omgekeerd.

a) Toon aan dat in de LC-kring de totale energie op ieder moment een constante is.

a) Energie opgeslagen in een smoorspoel

- Wanneer er door een smoorspoel een stroom I vloeit die varieert met een tempo dI/dt, dan wordt er energie toegevoerd aan de smoorspoel met een tempo

$$P = I\,\mathcal{E} = LI\,\frac{dI}{dt}$$

- De arbeid geleverd in de tijd dt wordt dan

$$dW = P\,dt = LI\,dI$$

- De arbeid om de stroom te verhogen van nul tot I is

$$W = \int dW = \int_0^I LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2$$

a) Energie opgeslagen in een smoorspoel, vervolg

- De geleverde arbeid kunnen we dan gelijk stellen aan de energie U die opgeslagen is in de smoorspoel. We nemen aan dat de energie $U = 0$ als $I = 0$:

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

- Dit kunnen we vergelijken met de energie die opgeslagen zit in het elektrisch veld van een condensator waarover een potentiaalverschil V is aangelegd (zie hoofdstuk 24):

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

b) Energie opgeslagen in een magnetisch veld

- Zoals bij de condensator kunnen we het resultaat meer algemeen interpreteren en er de energiedichtheid van een magneetveld uit afleiden. Daartoe vervangen we in de uitdrukking voor U de inductantie L door de definitie in functie van de magnetische flux:

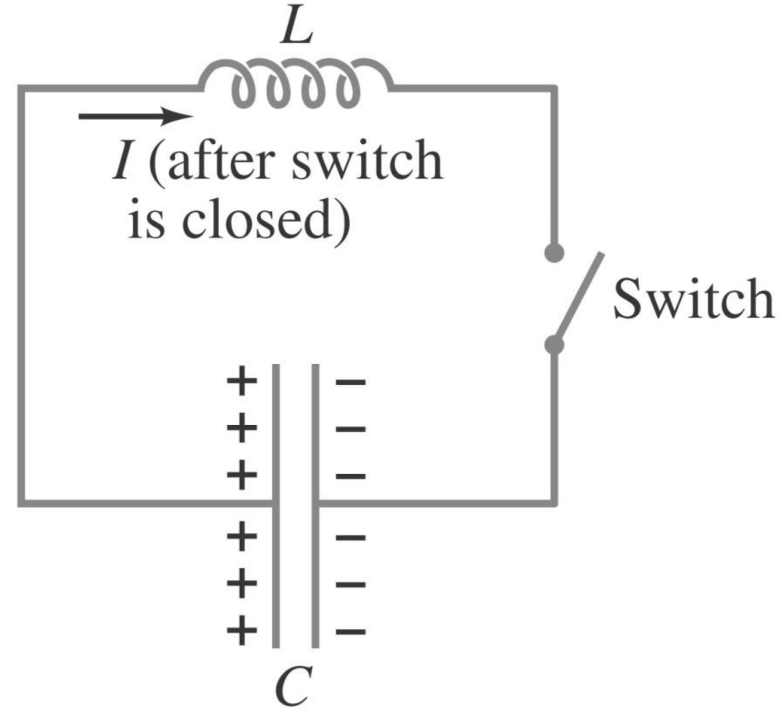
$$U = \tfrac{1}{2} L I^2 = \frac{N\Phi_B}{2I} I^2 = \frac{NBAI}{2} = \frac{NBA}{2}\frac{B\ell}{\mu_0 N} = \frac{B^2 A\ell}{2\mu_0}$$

- Hierbij gebruikten we het verband tussen stroom I en veld B voor een spoel met N windingen, doorsnede A en lengte ℓ (zie hoofdstuk 28). Voor de energiedichtheid van het magnetisch veld hebben we dan de algemene uitdrukking (μ_0 wordt μ voor een ferromagnetisch materiaal)

$$u = \text{energiedichtheid} = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

c) Oscillaties in een LC-kring

- Een condensator is verbonden met een smoorspoel in een LC-kring. We nemen aan dat de condensator initieel volledig opgeladen is en dat dan de schakelaar gesloten wordt. We nemen tevens aan dat er geen verliezen zijn omwille van een eindige elektrische weerstand of omwille van straling.



- Op $t = 0$ zit er een lading $+Q_0$ op de linkse plaat van de condensator en een lading $-Q_0$ op de rechtse plaat van de condensator. Als op dat moment de schakelaar wordt gesloten, zal de condensator ontladen en neemt de stroom door de spoel toe. De tweede regel van Kirchhoff levert dan dat

$$-L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

c) Oscillaties in een LC-kring, vervolg 1

- Onmiddellijk na het sluiten van de schakelaar zal positieve lading Q van de linkse plaat wegvloeien. De positieve stroom van lading wordt gegeven door $I = -dQ/dt$. We kunnen het resultaat van de tweede regel van Kirchhoff dan herschrijven als

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

- Deze differentiaalvergelijking is identiek is aan deze van de mechanische harmonische oscillator als we de lading Q vervangen door de uitwijking x en het product LC door m/k. We maken dan gebruik van de voor de mechanische oscillator geïntroduceerde oplossingsmethode en nemen voor $Q(t)$ dat

$$Q(t) = Q_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right)$$

c) Oscillaties in een LC-kring, vervolg 2

- Invullen van deze oplossing in de differentiaalvergelijking voor $Q(t)$ levert dan

$$-\omega^2 Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \;+\; \frac{1}{LC} Q_0 \cos(\omega t + \varphi) \;=\; 0$$

- Dit kunnen we herschrijven als

$$\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) \cos(\omega t + \varphi) \;=\; 0$$

- Dit kan enkel waar zijn voor alle tijden wanneer

$$\omega \;=\; 2\pi f \;=\; \frac{2\pi}{T} \;=\; \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

- Terwijl de lading Q op de condensator varieert in de tijd volgens een cosinus-functie, varieert de stroom volgens een sinus-functie:

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} \;=\; \omega Q_0 \sin(\omega t + \varphi) \;=\; I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

d) Behoud van energie in de LC-kring

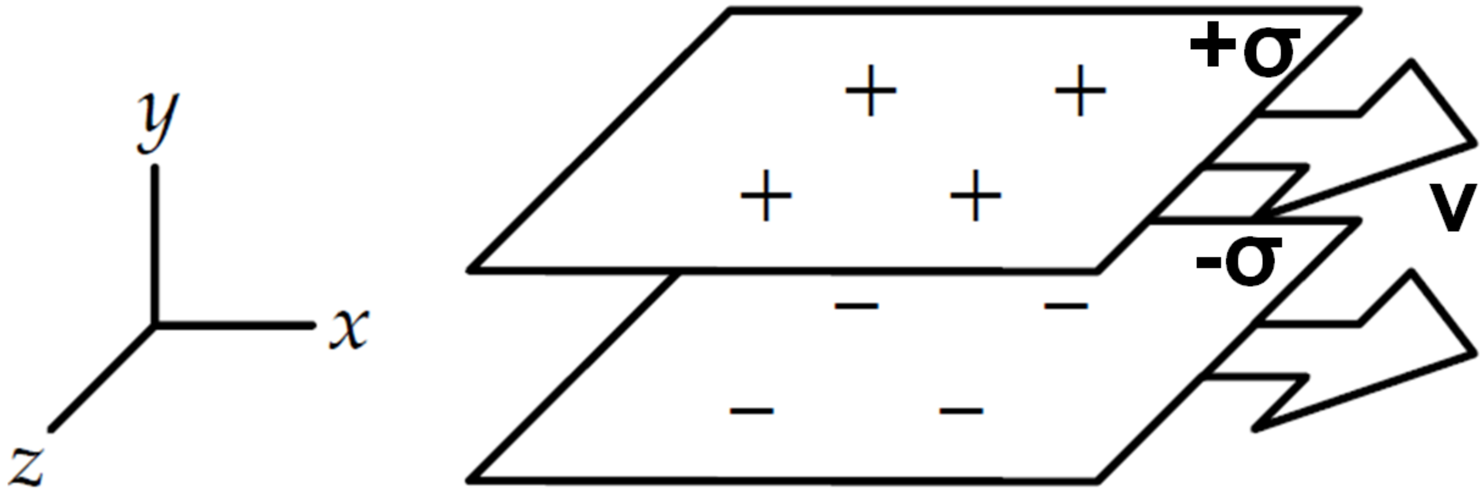
- Als we $\varphi = 0$ nemen, dan hebben we op $t = 0$ (en ook op $t = T/2$, $t = T$, enz. met T de periode) dat $U_E = Q_0^2/(2C)$ en $U_B = 0$ zodat alle energie opgeslagen zit in de condensator. Op $t = T/4$ (en ook op $t = 3T/4$, $t = 5T/4$, enz.) hebben we $U_E = 0$ en $U_B = Q_0^2/(2C)$ zodat alle energie opgeslagen zit in de smoorspoel. De totale energie, dit is de som van de elektrische energie en de magnetische energie blijft op ieder moment t constant:

$$U(t) = U_E(t) + U_B(t) = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{LI^2(t)}{2} = \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{L(\omega Q_0)^2 \sin^2(\omega t)}{2}$$

$$= \frac{Q^2(t)}{2C} + \frac{L\left(\frac{1}{LC}\right) Q_0^2 \sin^2(\omega t)}{2} = \frac{Q_0^2}{2C}\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Oefening

Een heel grote parallelle-platen-condensator draagt een lading die uniform verdeeld is met ladingsdichtheid $+\sigma$ op de bovenste plaat en $-\sigma$ op de onderste plaat. De platen zijn horizontaal en bewegen beiden in de horizontale richting met snelheid v naar rechts (zie de figuur).



Zoals aangegeven in de opgave gaat het over een condensator met heel grote vlakke platen. Analoog als bij de berekening van het elektrisch veld voor een condensator blijven we ook hier steeds ver van de randen. We hebben dan te maken met homogene velden en kunnen randeffecten verwaarlozen!

Oplossing van de oefening

a) Bepaal de lineaire stroomdichtheid die op deze manier ontstaat in de *x*-richting.

Beide dunne platen vormen een pad voor een tweedimensionale stroom. In dit geval wordt de (lineaire) stroomdichtheid gegeven in A/m (de stroom per eenheid van breedte). Als we een stuk van de platen beschouwen met lengte ℓ en met breedte w, dan wordt de stroom I gegeven door ($v = \ell/t$)

$$I = \frac{q}{t} = \frac{\sigma \ell w}{t} = \frac{\sigma \ell w v}{\ell} = \sigma w v$$

De lineaire stroomdichtheid J_{lin} wordt dan gevonden door I te delen door w:

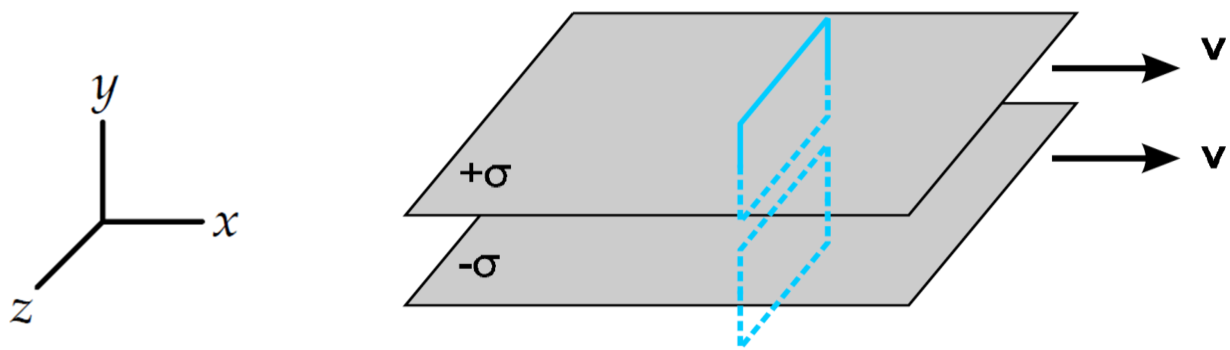
$$J_{\text{lin}} = \frac{I}{w} = \frac{\sigma w v}{w} = \sigma v$$

De stromen in de bovenste en de onderste plaat lopen in tegengestelde zin. In de bovenste plaat loopt de stroom naar rechts (in de $+x$-richting) en in de onderste plaat loopt de stroom naar links (in de $-x$-richting).

Oplossing van de oefening, vervolg 1

b) Gebruik de stroomdichtheid om aan te tonen dat het netto magneetveld tussen de platen gericht is volgens de z-as met als grootte $B = -\mu_0 \sigma v$.

Omwille van de symmetrie van het probleem (evenwijdige heel grote platen) kiezen we rechthoekige Ampèriaanse lussen zoals getoond in onderstaande figuur.



Uit de symmetrie van het probleem volgt dat het door de stroom gegenereerde magneetveld enkel een component volgens de z-as kan hebben (denk aan het veld veroorzaakt door een lange stroomvoerende draad). Uit de regel van de rechterhand volgt bovendien dat het veld van de bovenste plaat volgens de $-z$-richting wijst onder de plaat en volgens de $+z$-richting boven de plaat. Voor de onderste plaat is de situatie omgekeerd.

Oplossing van de oefening, vervolg 2

De wet van Ampère levert voor de Ampèriaanse lussen met breedte w evenwijdig aan de z-as dat

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I = \mu_0 J_{\text{lin}} w$$

Dit kunnen verder herwerken tot

$$2Bw = \mu_0 J_{\text{lin}} w \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 J_{\text{lin}}}{2} = \frac{\mu_0 \sigma v}{2}$$

En zoals hiervoor aangegeven heeft dit veld de zelfde absolute waarde voor de twee platen en is het telkens gericht volgens de $-z$-as voor het gebied tussen de twee platen. Tussen de twee platen tellen de velden op zodat het veld zoals aangegeven in de opgave inderdaad een z-component heeft gelijk aan

$$B = -2\,\frac{\mu_0 \sigma v}{2} = -\mu_0 \sigma v$$

Oplossing van de oefening, vervolg 3

c) Bepaal het magneetveld dicht bij de platen, maar aan de buitenkant van de condensator.

De wet van Ampère leert ons ook dat boven de bovenste plaat het gegenereerde veld gericht is volgens de +z-as, terwijl het veld dat gegenereerd wordt boven de onderste plaat, volgens de −z-richting gericht is. Hieruit vinden we dan dat boven de bovenste plaat de velden van de twee platen mekaar compenseren en het netto-veld is gelijk aan nul. Analoog vinden we dat beneden de onderste plaat de velden van de twee platen mekaar eveneens compenseren en dat het netto-veld ook daar gelijk aan nul is.

Het is belangrijk dat we steeds ver genoeg van de randen van de platen blijven teneinde de symmetrie van het probleem niet te verstoren. Dit betekent dat we ook niet te ver boven de platen mogen gaan (in vergelijking met hun laterale afmetingen) teneinde randeffecten te kunnen uitsluiten.

Oplossing van de oefening, vervolg 4

d) Wat is de grootte en richting van de magnetische kracht per eenheid van oppervlakte op de bovenste plaat?

We maken hier gebruik van het resultaat dat we in hoofdstuk 27 gevonden hebben voor de kracht op een stroomvoerende draad:

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\,\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}}$$

Hierbij is $\vec{\ell}$ een vector met lengte ℓ en een richting evenwijdig aan de stroom. Als we in deze uitdrukking voor de magnetische kracht het in b) gevonden magnetisch veld invullen voor de onderste plaat en gebruik maken van de in a) gevonden uitdrukking voor de stroomdichtheid, vinden we voor de absolute waarde van de kracht op een strook van de bovenste plaat met breedte w:

$$F_B = (\sigma v w)\,\ell \left(\frac{\mu_0 \sigma v}{2} \right) = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2} (\ell w)$$

De regel van de rechterhand leert ons dat de kracht naar boven gericht is (volgens de $+y$-as). Voor de kracht per eenheid van oppervlakte moeten we dit resultaat nog delen door ℓw.

Oplossing van de oefening, vervolg 5

e) Bij welke snelheid *v* is de magnetische kracht op één plaat even groot als de elektrische kracht op diezelfde plaat? Druk deze snelheid uit in functie van de elementaire constanten die op pagina 1 van het formularium gegeven worden.

In hoofdstuk 21 hebben we geleerd dat de elektrische kracht gegeven wordt door

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\,\vec{\mathbf{E}}$$

Het elektrisch veld dat door de onderste plaat met negatieve lading wordt veroorzaakt ter hoogte van de bovenste plaat met positieve lading is naar beneden gericht (volgens de $-y$-as). De absolute waarde van dit veld is (op voorwaarde dat we dicht genoeg bij de plaat blijven, zie hoofdstuk 21):

$$F_E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Oplossing van de oefening, vervolg 6

De elektrische kracht op de bovenste plaat is dan ook naar beneden gericht en heeft als absolute waarde

$$F_E = qE = (\sigma w \ell)\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w)$$

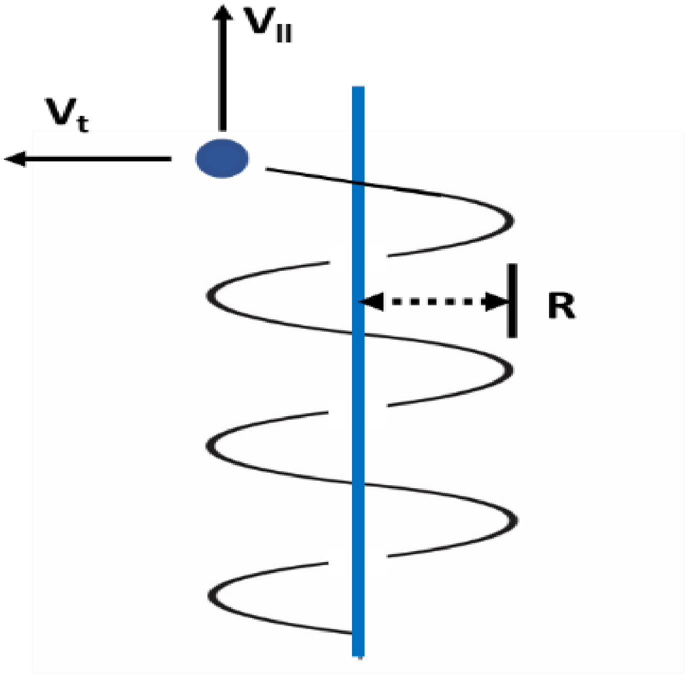
De velden die we hier gebruiken, zijn de velden voor een deel van de platen met oppervlakte ℓw. Beide krachten zullen mekaar compenseren als ze de zelfde absolute waarde hebben. Dit geeft dan

$$F_B = \frac{\mu_0 \sigma^2 v^2}{2}(\ell w) = F_E = \left(\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\right)(\ell w) \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Ter info: als we de waarden voor de constanten μ_0 en ε_0 invullen, dan vinden we een snelheid in de buurt van de 300.000 km/s, dit is de lichtsnelheid! (Dit zien we nog in week 11 bij de behandeling van hoofdstuk 31.)

4 korte vragen

1. Beschouw een metalen draad waardoor een stroom I vloeit. Nu wordt een elektron gevangen in het magnetisch veld van deze draad en beweegt in een helixvormig pad rond de draad met een constante snelheid $v_{//}$ evenwijdig met de draad. Vermits het elektron een cirkelvormige beweging uitvoert, wat is de tangentiële component v_t van de snelheid (loodrecht op de draad)?



Het magneetveld tengevolge van de stroom wordt gegeven door

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

De kracht uitgeoefend op het elektron wordt dan

$$F = e\, v_{\parallel} B = \frac{e\, v_{\parallel}\, \mu_0\, I}{2\pi R}$$

Zoals bij de berekening van de cyclotronbeweging stellen we deze kracht dan gelijk aan de centripetale kracht:

$$\frac{e\, v_{\parallel}\, \mu_0\, I}{2\pi R} = \frac{m\, v_t^2}{R}$$

We vinden dan tenslotte dat v_t gegeven wordt door

$$v_t = \left(\frac{e\, v_{\parallel}\, \mu_0\, I}{2\pi\, m} \right)^{1/2}$$

2. Deze tweede korte vraag sluit direct aan bij de vorige korte vraag. Wat gebeurt er met de snelheid van het elektron en met de afstand van het elektron tot de draad als we de stroom door de draad verdubbelen?

Uit het resultaat onderaan de vorige slide kunnen we besluiten dat de tangentiële component v_t van de snelheid evenredig met $I^{1/2}$ varieert. Deze component zal dan met $2^{1/2}$ toenemen als de stroom I door de draad verdubbeld wordt. De andere component van de snelheid, dit is de component $v_{//}$ die evenwijdig is met het magneetveld B, wordt niet beïnvloed door de magnetische kracht en blijft dus onveranderd. Ook de straal R blijft onveranderd aangezien deze straal is weggevallen in het resultaat onderaan de vorige slide.

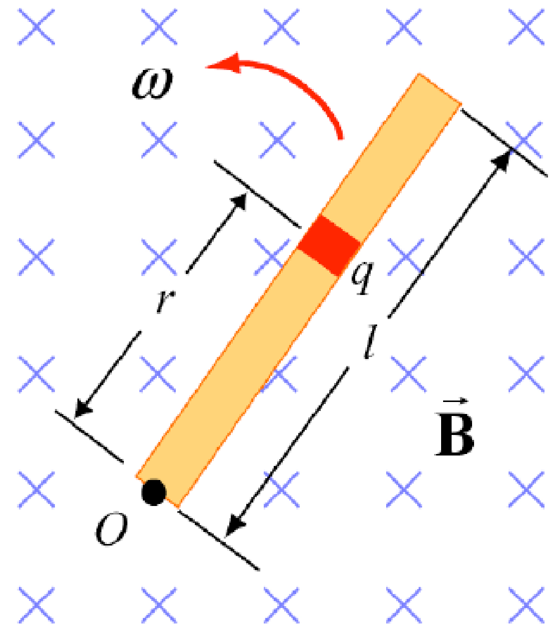
3. Een lange metalen staaf met een lengte van 100 cm roteert om één van zijn uiteinden met een constant hoeksnelheid van 10 radialen/s. Een uniform magnetisch veld van 2.0 mT maakt een hoek van 30° met het vlak waarin de staaf roteert. Hoe groot is het potentiaalverschil tussen de twee uiteinden van de metalen staaf?

   a. 2.5 mV
   b. 5.0 mV
   c. 0 mV
   d. 10.0 mV
   e. 20.0 mV

Mijn antwoord: b

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

We gaan te werk zoals bij het bereke-nen van het potentiaalverschil tussen de uiteinden van een staaf die met een constante snelheid beweegt in een ho-mo-geen magneetveld (zie het hand-boek op pagina 765). Eerst en vooral moeten we er nu echter rekening mee houden dat enkel de component van het magneetveld die loodrecht staat op de staaf, relevant is voor de magneti-sche kracht. In dit geval wordt dit veld $B_\perp = 2 \times \cos(60°)$ mT = 1 mT.



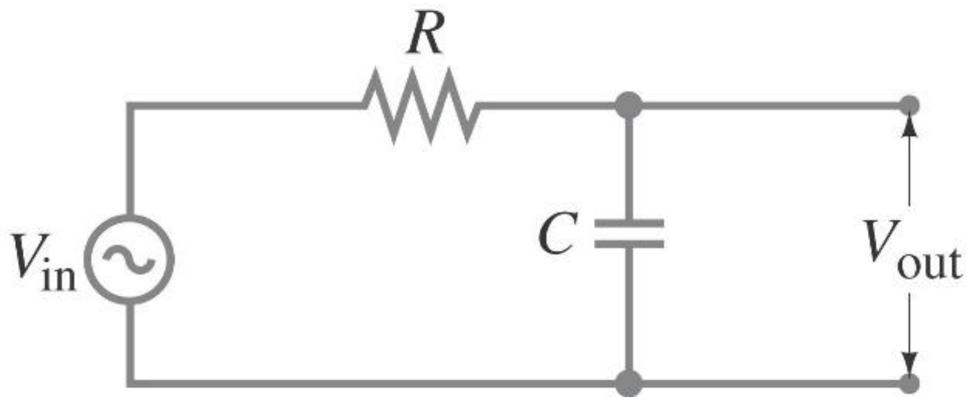
Mijn verantwoording van het gekozen antwoord, vervolg:

Bovendien is voor de roterende staaf de magnetische kracht op de elektronen niet constant over de lengte van de staaf en moeten we het lokale elektrische veld integreren over de lengte van de staaf (zie figuur, we kijken enkel naar de grootte van de kracht):

$$V = \int_0^{\ell} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{\ell} E\,dr = \int_0^{\ell} v(r)B\,dr = \int_0^{\ell} r\omega B\,dr$$

$$= \omega B \int_0^{\ell} r\,dr = \frac{\omega B \ell^2}{2} = \frac{10 \times (1.0 \times 10^{-3}) \times 1.0 \times 1.0}{2}\ \mathrm{V} = 5.0\,\mathrm{mV}$$

4. Onderstaande figuur toont een zogenaamde laagdoorlaatfilter. Bereken voor deze filter de verhouding tussen de uitgangsspanning en de ingangsspanning, dit is V_{out}/V_{in}.



De uitgangsspanning is de spanning over de condensator, dit is de stroom die vloeit door het circuit vermenigvuldigd met de reactantie van de condensator. Deze stroom bekomen we dan door de ingangsspanning te delen door de impedantie van het circuit. Tenslotte delen we de uitgangsspanning nog door het aldus bekomen resultaat voor de ingangsspanning om de gezochte verhouding A te bekomen.

$$V_{\text{out}} = IX_C = \frac{V_{\text{in}} X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{V_{\text{in}}}{\sqrt{\left(R/X_C\right)^2 + 1}} = \frac{V_{\text{in}}}{\sqrt{\left(2\pi f C R\right)^2 + 1}}$$

$$A = \frac{V_{\text{out}}}{V_{\text{in}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{4\pi^2 f^2 C^2 R^2 + 1}}}$$