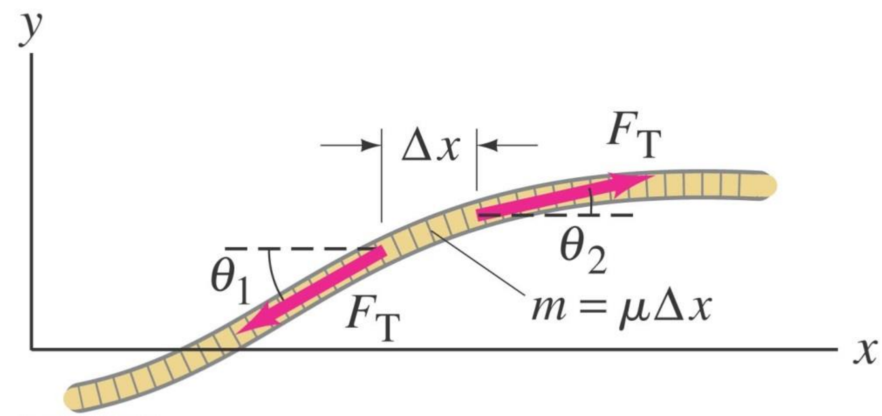
Langere vraag over de theorie

(a) Geef de afleiding van de golfvergelijking voor de één-dimensionale transversale golfbeweging langsheen een opgespannen snaar.

(b) Geef ook de afleiding van het gemiddeld vermogen en de intensiteit die geassocieerd zijn met de één-dimensionale transversale golfbeweging.

(a) Afleiding van de golfvergelijking voor een snaar

- Heel wat types van golven voldoen aan een bewegingsvergelijking die het equivalent is van de tweede wet van Newton voor de beweging van deeltjes. We leiden deze **golfvergelijking** hier af voor het geval van een opgespannen snaar



- We nemen aan dat de amplitude heel klein is in vergelijking met de golflengte. De uitwijking is dan enkel in de verticale richting en de spanning F_T in de snaar kan constant verondersteld worden. We passen de tweede wet van Newton toe voor een stukje snaar met massa $m = \mu\Delta x$ waarbij μ de massa per eenheid van lengte is. De tweede wet van Newton levert dan dat

$$\sum F_y = m a_y \qquad \Rightarrow \qquad F_T \sin\theta_2 - F_T \sin\theta_1 = (\mu\Delta x)\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

(a) Afleiding van de golfvergelijking voor een snaar, vervolg

- Voor kleine uitwijkingen geldt dat

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial D}{\partial x} = s$$

- s is de lokale helling van de snaar. We kunnen ons resultaat voor de tweede wet van Newton dan herschrijven:

$$F_T\left(s_2 - s_1\right) = \left(\mu\,\Delta x\right)\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \qquad F_T\,\frac{\Delta s}{\Delta x} = \mu\,\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

- We laten dan $\Delta x \to 0$ en vinden dat

$$F_T\,\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \mu\,\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

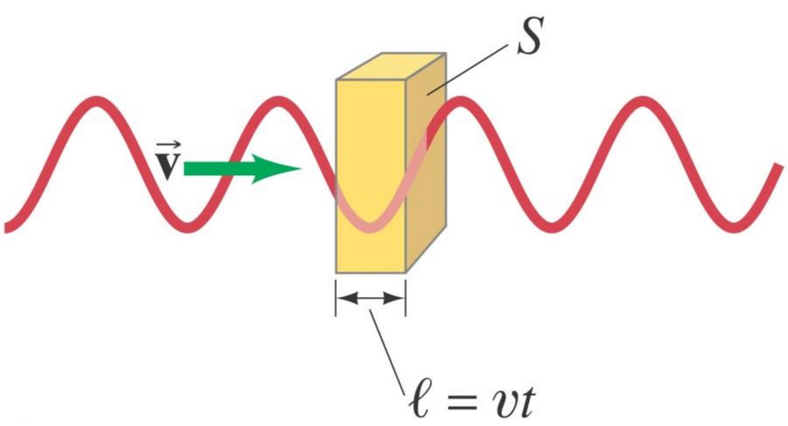
- Schrijven in functie van de snelheid levert de golfvergelijking:

$$\boxed{\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}}$$

(b) Afleiding gemiddeld vermogen en intensiteit

- Lopende golven (transversale en longitudinale) transporteren bij beweging door een medium energie die wordt doorgegeven door de opeenvolgende elementjes van het medium.
- We kunnen ieder elementje modelleren als een eenvoudige harmonische oscillator (zie hoofdstuk 14). Bij deze oscillaties wordt potentiele energie voortdurend omgezet in kinetische energie en omgekeerd.
- Ieder element (deeltje of klein volume) met massa m zal bij een amplitude A een hoeveelheid energie vertegenwoordigen gegeven door

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = 2\pi^2 m f^2 A^2$$



- Voor massa $m = \rho V$ (ρ is massadichtheid) met $V = S\ell$ en als de afstand $\ell = v t$ afgelegd wordt in tijd t, geldt dat

$$E = 2\pi^2 \rho S v t f^2 A^2$$

(b) Afleiding gemiddeld vermogen en intensiteit, vervolg

- Het gevonden resultaat leert ons dat *de energie die getransporteerd wordt door een lopende golf evenredig is met het kwadraat van de amplitude en het kwadraat van de frequentie*.
- Het gemiddelde tempo waarmee de energie wordt getransfereerd is het **gemiddelde vermogen**:

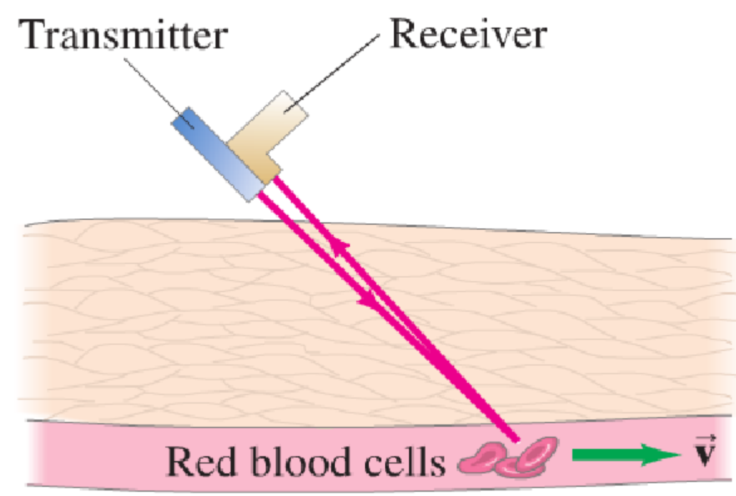
$$\overline{P} = \frac{E}{t} = 2\pi^2 \rho v S f^2 A^2$$

- We definiëren dan de **intensiteit** van een golf als het gemiddelde vermogen dat wordt getransfereerd doorheen een eenheid van oppervlak loodrecht op de golfbeweging:

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = 2\pi^2 \rho v f^2 A^2$$

Oefening

a) *Een "Doppler flow meter" wordt gebruikt om de snelheid van bloed te meten. Een zender en een ontvanger worden op de huid geplaatst zoals te zien is op de figuur. Typische geluidsgolven met frequenties rond 5.0 MHz worden gebruikt, omdat ze een grote kans hebben om te worden gereflecteerd door de rode bloedcellen. Men kan de snelheid van het bloed afleiden uit de frequentie van de gereflecteerde golven die Doppler verschoven zullen zijn omdat de rode bloedcellen bewegen. De normale bloedsnelheid bedraagt typisch 0.1 m/s. Neem nu aan dat het bloedvat gedeeltelijk vernauwd is zodat de bloedsnelheid wordt verhoogd. De "Doppler flow meter" meet een Doppler-shift van 780 Hz. Hoeveel bedraagt de bloedsnelheid in de vernauwde regio? De effectieve hoek tussen de geluidsgolven (uitgezonden en gereflecteerde) en de richting van de bloedstroom bedraagt 45°. De geluidssnelheid in dit weefsel bedraagt 1540 m/s.*



Om tot de oplossing te komen stellen we eerst en vooral vast dat er in dit geval twee Doppler-verschuivingen zijn. Eerst is er een verschuiving met een stationaire bron (de zender) en een bewegende waarnemer (de bloedcellen). Vervolgens is er een tweede verschuiving waarbij er een bewegende bron is (de bloedcellen) en een stationaire waarnemer (de ontvanger). Anderzijds zijn de snelheidsvectoren van de waarnemer en de bron niet evenwijdig, maar maken ze bij de twee verschuivingen een hoek van 45° met mekaar. Uit de afleiding voor evenwijdige snelheids-vectoren zien we dat enkel de component van de snelheid die evenwijdig is met de verbindingslijn, relevant is voor de Doppler-verschuiving. De relevante snelheid is dan $v_{\text{bloed}} \cos 45°$. Voor de oplossing maken we dan gebruik van de algemene uitdrukking voor de Doppler-verschuiving wanneer zowel de bron als de waarnemer bewegen (zie formularium):

$$f' = \left(\frac{v_{\text{snd}} \pm v_{\text{obs}}}{v_{\text{snd}} \mp v_{\text{source}}} \right) f$$

Daar de bloedcellen weg bewegen van de zender en de ontvanger, moeten we in de teller het minteken nemen en in de noemer het plusteken (twee keer een verlaging van de frequentie):

$$f' = \left(\frac{v_{\mathrm{snd}} - v_{\mathrm{obs}}}{v_{\mathrm{snd}} + v_{\mathrm{source}}} \right) f$$

Identificatie van de relevante snelheden levert dan

$$f_{\mathrm{detector}} = \left(\frac{v_{\mathrm{snd}} - v_{\mathrm{bloed}} \cos 45^\circ}{v_{\mathrm{snd}} + v_{\mathrm{bloed}} \cos 45^\circ} \right) f_{\mathrm{bron}}$$

en oplossen naar v_{bloed} laat toe om de gevraagde snelheid te bekomen:

$$v_{\mathrm{bloed}} \left(f_{\mathrm{detector}} \cos 45^\circ + f_{\mathrm{bron}} \cos 45^\circ \right) = f_{\mathrm{bron}} v_{\mathrm{snd}} - f_{\mathrm{detector}} v_{\mathrm{snd}}$$

Voor de snelheid van het bloed vinden we dan dat

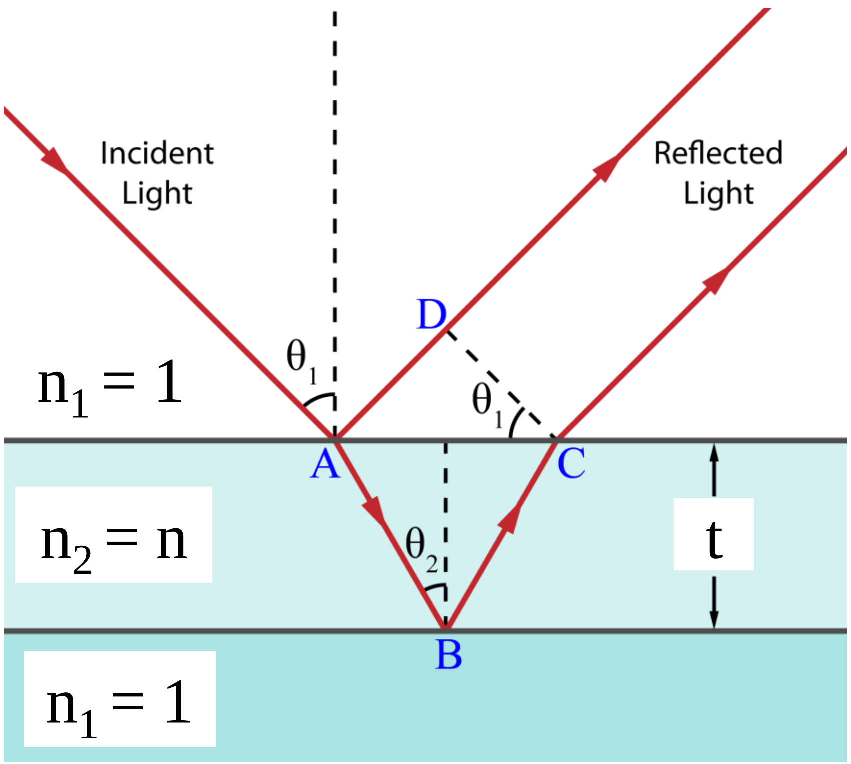
$$v_{\text{bloed}} = \frac{v_{\text{snd}}\left(f_{\text{bron}} - f_{\text{detector}}\right)}{\cos 45^\circ \left(f_{\text{bron}} + f_{\text{detector}}\right)}$$

Invullen van de gegevens levert tenslotte dat

$$v_{\text{bloed}} = \frac{\sqrt{2}\times 1540\,\text{m/s}\times 780\,\text{Hz}}{2\times 5.0\times 10^{6}\,\text{Hz} - 780\,\text{Hz}} \cong \frac{1.70\times 10^{6}\,\text{m/s}}{10^{7}} \cong 0.17\,\text{m/s}$$

b) *In de les hebben we de voorwaarde voor interferentie in dunne lagen afgeleid die geldig is voor quasi-loodrechte inval van de initiële straal. Toon aan dat wanneer het licht invalt onder een hoek θ_1 ten opzichte van de loodrechte, deze voorwaarde wordt gewijzigd tot $2nt \cos \theta_2 = (m + 1/2)\,\lambda$, waarbij θ_2 de brekingshoek in het medium is.*

De figuur hiernaast geeft het pad aan van de twee golven die we moeten gebruiken om de interferentie te berekenen.



Het wegverschil tussen de twee golven is AB + BC – AD. Voor constructieve interferentie is de voorwaarde dat het faseverschil een geheel veelvoud is van 2π (in radialen). 2π komt overeen met een wegverschil λ_n met λ_n de golflengte van het licht in het medium met brekingsindex n zodat $\lambda_n = \lambda/n$ met λ de golflengte in de lucht of vacuüm. Het betreffende wegverschil AB + BC – AD kunnen we dan vertalen in een faseverschil

$$\mathrm{AB}\,\frac{2\pi}{\lambda_n} + \mathrm{BC}\,\frac{2\pi}{\lambda_n} - \mathrm{AD}\,\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi m$$

Dit kunnen we verder vertalen naar

$$\mathrm{AB}\,\frac{n}{\lambda} + \mathrm{BC}\,\frac{n}{\lambda} - \mathrm{AD}\,\frac{1}{\lambda} = m$$

Rekening houdend met de hoeken θ_1 en θ_2 voor respectievelijk de invallende en de gebroken straal hebben we dan dat

$$\mathrm{AB}\,n + \mathrm{BC}\,n - \mathrm{AD} = \frac{t\,n}{\cos\theta_2} + \frac{t\,n}{\cos\theta_2} - \left(2t\tan\theta_2\right)\sin\theta_1 = m\,\lambda$$

Dit kunnen we verder herschrijven met wet van Snell als

$$\frac{2t\,n}{\cos\theta_2} - \left(2t\tan\theta_2\right)n\sin\theta_2 = \frac{2t\,n}{\cos\theta_2} - \frac{2t\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2}\,n = m\,\lambda$$

Er treedt echter nog een extra faseverschil π op bij de reflectie aan de bovenkant van de laag ($n > 1$). De voorwaarde voor constructieve interferentie verandert dan in

$$\frac{2\,t\,n}{\cos\theta_2}\left(1-\sin^2\theta_2\right) = \frac{2t\cos^2\theta_2}{\cos\theta_2}\,n = 2\,n\,t\cos\theta_2 = \left(m+1/2\right)\lambda$$

4 korte vragen

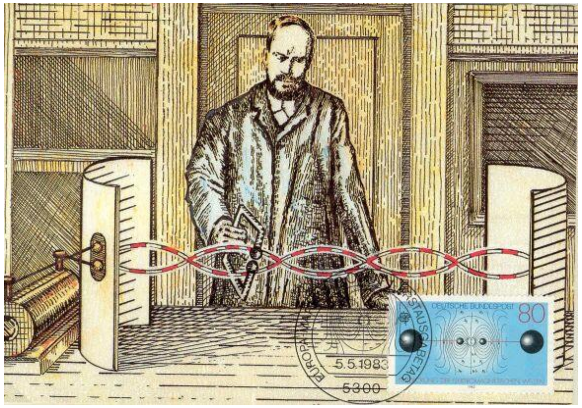
1. *Een radiostation zendt elektromagnetische golven uit met een gemiddeld vermogen P. Bereken de amplitude van het elektrisch veld op een afstand d van het radiostation, waarbij een isotrope verdeling van de uitgezonden golven mag verondersteld worden.*

We maken gebruik van het verband tussen de gemiddelde intensiteit (de gemiddelde grootte van de Poynting-vector) en de sterkte van het elektrisch veld. We maken ook gebruik van het feit dat de intensiteit overeenkomt met vermogen per eenheid van oppervlak. We mogen aannemen dat het vermogen sferisch symmetrisch verdeeld wordt rond de bron:

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \sqrt{\frac{P}{2\pi \varepsilon_0 c d^2}}$$

2. *Deze korte vraag handelt over het golfpatroon dat op bijgevoegde figuur wordt opgemeten door Heinrich Hertz. Hoe ontstaat dit golfpatroon en hoe kon Heinrich Hertz uit dit patroon de lichtsnelheid afleiden?*

- Het gaat hier om een staande-golfpatroon dat ontstaat ten gevolge van de interferentie tussen de golf die aan de linkse spiegel wordt gegenereerd door een zender (met een LC-circuit) en de golf die ontstaat door reflectie van de eerste golf aan de rechtse spiegel.
- De afstand tussen de maxima (buiken) en minima (knopen wordt gegeven door (zie formularium) $n\lambda/2$. Hertz kon deze afstand bepalen met behulp van een ontvangende antenne en kende dan λ.
- Daar Hertz de eigenfrequentie kende van het LC-circuit en ook de golflengte λ, kon hij dan via de relatie $v = \lambda \times f$ bepalen dat de snelheid van de elektromagnetische golven ongeveer 3×10^8 m/s bedraagt.



3. *Monochromatisch licht (λ = 500 nm) valt loodrecht in op een zeepbel (n = 1.40). Hoe dik is de bel (in nm) wanneer destructieve interferentie optreedt in het gereflecteerde licht?*

We kunnen hier gebruik maken van de voorwaarde voor destructieve interferentie die optreedt bij reflectie van lichtgolven door de boven- en de onderkant van een dunne film (zie formularium):

$$2nt = m\lambda$$

De dikte van de bel vinden we dan door de gegeven waarden voor de golflengte λ en de brekingsindex n in te vullen met $m = 1$:

$$t = \frac{m\lambda}{2n} = \frac{500\,\text{nm}}{2.8} \cong 179\,\text{nm}$$

Het juiste antwoord is dus antwoord (b).

4. *Bij welke hoek boven de horizon bevindt de zon zich wanneer het zonlicht dat gereflecteerd wordt door een meer maximaal gepolariseerd is? Druk uw antwoord uit in functie van de brekingsindex n van het water van het meer.*

Volledige polarisatie treedt op bij inval onder de Brewster-hoek die gegeven wordt door (zie formularium)

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}$$

waarbij $n_2 = n$ de brekingsindex is van het water van het meer en n_1 de brekingsindex is van de lucht. Als we $n_1 = 1$ nemen, krijgen we

$$\tan\theta_p = n \quad \Rightarrow \quad \theta_p = \tan^{-1} n$$

We moeten er nog rekening mee houden dat de hoeken in bovenstaande uitdrukking gegeven worden ten opzichte van de normale op het wateroppervlak! De gezochte hoek ten opzichte van het oppervlak van het meer is dan $90° - \tan^{-1} n$.