OPLOSSINGEN PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
vrijdag 23 november 2007

1. *Zij V een vectorruimte en $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ een deelverzameling van V. Bewijs:*

   (a) als S een maximaal vrij deel is van V, dan is S een basis van V,

   (b) als S een minimaal voortbrengend deel is van V, dan is S een basis van V.

   Zie cursus. (theorievraag)

2. *Beschouw de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$:*

$$\Pi := \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

en

$$E := \left\{ (d,e,f) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

(a) *Toon aan dat Π een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^3$.*

Om aan te tonen dat Π een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^2$, volstaat het de volgende eigenschappen te controleren:

i. $(0,0,0) \in \Pi$;

ii. als $\lambda \in \mathbb{R}$ en $(a,b,c) \in \Pi$, dan is $\lambda(a,b,c) \in \Pi$;

iii. als $(a_1,b_1,c_1), (a_2,b_2,c_2) \in \Pi$, dan is $(a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) \in \Pi$.

Eigenschap 1 volgt uit

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Eigenschap 2 volgt uit de gelijkheden

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Eigenschap 3 volgt uit de gelijkheden

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

(b) *Bepaal een basis en dimensie van Π.*

Uit de eigenschappen van de determinant volgt dat Π alle lineaire combinaties van $(3,1,4)$ en $(1,5,9)$ moet bevatten, en deze twee vectoren zijn duidelijk lineair onafhankelijk. Hieruit volgt alvast dat $\dim \Pi \geq 2$.
Anderzijds, omdat bijvoorbeeld $(0,0,1) \notin \Pi$, weten we dat $\dim \Pi < \dim \mathbb{R}^3 = 3$.
We besluiten dat $\dim \Pi = 2$ en dat $\{(3,1,4), (1,5,9)\}$ een basis is.

(c) *E is ook een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$. (Dit hoef je niet te bewijzen.) Bepaal een basis en dimensie van $\Pi \cap E$.*

$\Pi \cap E$ bevat alle vectoren $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ waarvoor tegelijk

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{en} \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0.$$

Beide uitdrukkingen uitwerken geeft aanleiding tot een stelsel

$$\begin{cases} -11x - 23y + 14z = 0 \\ 27x - 4y - 26z = 0 \end{cases}$$

(de tweede vergelijking werd door 2 gedeeld om de coëfficiënten wat kleiner te maken). De tweede vergelijking doen we maal 11 en we tellen er 27 keer de eerste bij op:

$$\begin{cases} -11x - 23y + 14z = 0 \\ -665y + 92z = 0. \end{cases}$$

We zien dat we z vrij kunnen kiezen, en dat y en x door die keuze volledig vastliggen. Als we z van de vorm 665λ kiezen, rekenen we uit dat alle oplossingen gegeven zijn door

$$\Pi \cap E = \{(654\lambda, 92\lambda, 665\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Zo vinden we dat $\Pi \cap E$ dimensie 1 heeft, en dat $\{(654, 92, 665)\}$ een basis is.

3. *Zijn de volgende uitspraken WAAR of VALS? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.*

(a) *Zij $V_1, V_2 \subset V$ lineaire deelruimten van een vectorruimte V en zij $U_1, U_2 \subset V$ lineaire deelruimten van respectievelijk V_1 en V_2. Dan is $U_1 + U_2$ een lineaire deelruimte van $V_1 + V_2$.*

Opdat $U_1 + U_2$ een lineaire deelruimte van $V_1 + V_1$ zou zijn, is het voldoende aan te tonen dat $U_1 + U_2$ een deelruimte is van V en dat $U_1 + U_2 \subset V_1 + V_2$.

Eigenlijk behoort het feit dat $U_1 + U_2$ een deelruimte is van V tot de cursus (hoofdstuk $4.\frac{1}{2}$, opgave $4\frac{1}{2}.3.$a)) en dus mocht je hier naar verwijzen. Voor wie deze opgave nog niet gemaakt heeft (of niet wist dat ze bestond), gaat een oplossing als volgt.

Zij $u_1 + u_2$ en $u_1' + u_2'$ willekeurige vectoren van $U_1 + U_2$, waarbij $u_1, u_1' \in U_1$ en $u_2, u_2' \in U_2$. De som van $u_1 + u_2$ en $u_1' + u_2'$ is gelijk aan $(u_1 + u_1') + (u_2 + u_2')$. Hierbij is $u_1 + u_1' \in U_1$ (want U_1 is een lineaire deelruimte van V) en $u_2 + u_2' \in U_2$ (want U_2 is een lineaire deelruimte van V), dus $(u_1 + u_2) + (u_1' + u_2') \in U_1 + U_2$. Als λ een willekeurig reëel getal is, is $\lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2$ een vector in $U_1 + U_2$, want $\lambda u_1 \in U_1$ en $\lambda u_2 \in U_2$. Hieruit volgt dat $U_1 + U_2$ een lineaire deelruimte is van V.

We moeten enkel nog aantonen dat $U_1 + U_2 \subset V_1 + V_1$. Neem $u_1 + u_2$ willekeurig in $U_1 + U_2$, met $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$. Omdat U_1 een lineaire deelruimte is van V_1, is $U_1 \subset V_1$ en dus $u_1 \in V_1$. Analoog volgt dat $u_2 \in V_2$ en dus $u_1 + u_2 \in V_1 + V_2$.

(b) *De verzameling*

$$V := \{U \subset \mathbb{R}^3 \mid U \textit{ is een lineaire deelruimte van } \mathbb{R}^3, +, \cdot\}$$

met optelling

$$\begin{array}{rccl} \boxplus : & V \times V & \to & V \\ & (U, W) & \mapsto & U \boxplus W := U + W \end{array}$$

en scalaire vermenigvuldiging

$$\begin{array}{cccc} \boxdot & : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & & (\lambda, U) & \mapsto & \lambda \boxdot U := \{\lambda u \mid u \in U\} \end{array}$$

vormt een vectorruimte $V, \boxplus, \boxdot$.

Veronderstel dat V een vectorruimte is met de bewerkingen $\boxplus$ en $\boxdot$. De nulvector 0_V van V moet voldoen aan

$$\forall U \in V : U + 0_V = 0_V + U = U.$$

Hieruit volgt dat de nulvector 0_V moet gelijk zijn aan de nulruimte $\{(0,0,0)\}$. Voor een willekeurige lineaire deelruimte U van $\mathbb{R}^3$ bestaat er dus een deelruimte $-U \in V$ zodat $U + (-U) = \{(0,0,0)\}$. Omdat

$$\dim(U + (-U)) \geq \dim(U),$$

kan deze gelijkheid enkel gelden als U de nulruimte is. Om een concreet voorbeeld te geven, kunnen we voor U bijvoorbeeld de x-as nemen, m.a.w. $U = [(1,0,0)]$. Dan is $0 = \dim(U + (-U)) \geq \dim(U) = 1$, een contradictie.

4. *Beschouw de lineaire afbeelding*

$$\begin{array}{cccc} \Psi & : & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & & \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y & y+3z \\ z+4w & w+5x \end{pmatrix}. \end{array}$$

Bepaal de matrix van Ψ*:*

(a) *ten opzichte van (twee keer) de basis*

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Per definitie bevat de matrix $M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Psi)$ van Ψ ten opzichte van twee keer de basis $\mathcal{E}$ op de kolommen de coördinaten van de beelden van de geordende basis $\mathcal{E}$ ten opzichte van de geordende basis $\mathcal{E}$. Aangezien achtereenvolgens

$$\Psi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Psi(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

volgt er dat

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Psi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) *ten opzichte van (twee keer) de basis*

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

We stellen eerst en vooral de matrix A op van basisverandering van $\mathcal{E}$ naar $\mathcal{F}$. Deze matrix bevat op de kolommen de coördinaten van de vectoren uit de geordende basis $\mathcal{F}$ ten opzichte van de geordende basis $\mathcal{E}$. We bekomen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

We vinden hieruit ook de matrix B van basisverandering van $\mathcal{F}$ naar $\mathcal{E}$, namelijk

$$B := A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nu geldt er dat (controleer voor jezelf of je goed begrijpt waarom volgende gelijkheid geldt!)

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\Psi) &= B \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\Psi) \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -5 & -4 & -5 & -2 \\ 5 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Zo bekomen we bijvoorbeeld inderdaad dat

$$\Psi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.)$$

Een alternatieve oplossingsmethode bestaat erin om rechtstreeks de definitie toe te passen. Zo dient er bijvoorbeeld op de eerste kolom van de matrix $M_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(\Psi)$ de coördinaten geplaatst te worden van $\Psi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ ten opzichte van de geordende basis $\mathcal{F}$; we moeten dus α, β,γ en δ bepalen in volgende gelijkheden:

$$\Psi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dit geeft aanleiding tot het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta + \gamma + \delta &=& 1 \\ \beta + \gamma + \delta &=& 0 \\ \delta &=& 0 \\ \gamma + \delta &=& 5 \end{array} \right. .$$

Hieruit halen we makkelijk dat $\alpha = 1$, $\beta = -5$,$\gamma = 5$ en $\delta = 0$, wat dan ook de eerste kolom bepaalt van de gezochte matrix.

Deze methode vraagt dus het oplossen van vier stelsels, telkens met vier vergelijkingen in vier onbekenden.