Kwantummechanica: oplossing examenoefeningen

1. Een deeltje met massa m bevindt zich in de grondtoestand van een oneindige potentiaalput. Plots expandeert de potentiaalput tot twee maal zijn oorspronkelijke breedte L (de rechterwand beweegt van L naar $2L$). De golffunctie blijft daarbij momentaan onverstoord. Op tijdstip $t = 0$, net na de plotse verandering, is de golffunctie dus nog onveranderd. De energie van het deeltje wordt een lange tijd daarna gemeten.

   (a) Wat is het meest waarschijnlijke resultaat van de meting? Wat is de waarschijnlijkheid om deze waarde te meten?

   (b) Wat is het op één na meest waarschijnlijke meetresultaat? Wat is zijn waarschijnlijkheid?

   (c) Wat is de verwachtingswaarde van de energie? (Hint: indien je een oneindige reeks uitkomt, probeer dan een andere methode)

   Oplossing

   (a) Voor de expansie van de potentiaalput worden de eigentoestanden en bijhorende energieniveaus gegeven door (uitwerken oneindige potentiaalput met breedte L):

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

   Het deeltje bevindt zich in de grondtoestand ($n = 1$) dus zijn toestand wordt gegeven door:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

   Na de expansie worden de nieuwe eigentoestanden en bijhorende energieniveaus gegeven door (analoge uitwerking oneindige potentiaalput maar nu met breedte $2L$):

$$\psi'_n = \sqrt{\frac{2}{2L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

$$E'_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}$$

   Een willekeurige toestand in de nieuwe potentiaalput wordt gegeven door een lineaire combinatie van deze stationaire toestanden.
   Er is gegeven dat op $t = 0$ de golffunctie van het deeltje nog steeds dezelfde is van voor de expansie, dus:

$$\Psi'(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

   Deze toestand kan geschreven worden als lineaire combinatie van de ψ'_n:

$$|\Psi'(x, 0)\rangle = \sum_n c_n |\psi'_n\rangle$$

De coëfficiënten c_n kunnen bepaald worden door:

$$\begin{aligned}
c_n &= \langle \Psi'(x,0)|\psi'_n\rangle && (1)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx && (2)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2L}\int_0^L \left\{\cos\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi x}{L}\right]-\cos\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi x}{L}\right]\right\}dx && (3)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}L}\left\{\frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi x}{L}\right]}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{L}}-\frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi x}{L}\right]}{\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{\pi}{L}}\right\}\Bigg|_0^L \quad \text{(voor n} \neq 2) && (4)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}L}\left\{\frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)\pi\right]}{\left(\frac{n}{2}-1\right)}-\frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi\right]}{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right\} && (5)\\
&= \frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi\right]}{\sqrt{2}L}\left[\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)}-\frac{1}{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right] && (6)\\
&= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sin\left[\left(\frac{n}{2}+1\right)\pi\right]}{n^2-4} && (7)\\
&= \begin{cases} 0 & \text{voor } n \text{ is even}\\ \pm\frac{4\sqrt{2}}{\pi(n^2-4)} & \text{voor } n \text{ is oneven}\end{cases} && (8)
\end{aligned}$$

De waarschijnlijkheid om E_n te meten is:

$$P_n = |c_n|^2 = \begin{cases} 1/2 & \text{voor } n=2\\ \frac{32}{\pi^2(n^2-4)^2} & \text{voor } n \text{ is oneven}\\ 0 & \text{voor andere } n\end{cases}$$

Het meest waarschijnlijke meetresultaat: $E_2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

Zijn waarschijnlijkheid: $P_2 = c_2^2 = \frac{1}{2}$

(b) Het op één na meest waarschijnlijke meetresultaat: $E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$

Zijn waarschijnlijkheid: $P_1 = c_1^2 = \frac{32}{9\pi^2} = 0,36$

(c) De verwachtingswaarde van de energie bereken je normaal gezien als:

$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\Psi(x,t)|\hat{H}|\Psi(x,t)\rangle$$

waarbij $|\Psi(x,t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\psi'_n\rangle$
Dit is een oneindige reeks (door de sommatie over n).
We moeten dus een andere manier zoeken. Dit kunnen we door te steunen op het feit dat $\langle\hat{H}\rangle$ constant is wegens het theorema van Ehrenfest. Zo kunnen we de gemiddelde energie dus ook berekenen door te evalueren op tijdstip $t=0$:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{H}\rangle &= \langle\Psi(x,0)|\hat{H}|\Psi(x,0)\rangle && (9)\\
&= \int_0^L \Psi^*(x,0)\hat{H}\Psi(x,0)dx && (10)\\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx && (11)\\
&= \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} && (12)
\end{aligned}
$$

Dit is dezelfde waarde als vóór de expansie van de potentiaalput.

2. Twee deeltjes met spin $s_1 = 1$ en $s_2 = 1/2$ vormen een gebonden toestand. Stel $\hbar = 1$ om te vereenvoudigen.

   (a) Construeer de eigentoestanden voor de totale spin $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$ en zijn projectie langs de Z-as $\hat{S}_z$ (bepaal m.a.w. de Clebsch-Gordon coëfficiënten).

   (b) Stel dat het systeem zich op tijd $t = 0$ in de toestand bevindt waarbij $S = 1/2$ en $M = 1/2$ en dat de Hamiltoniaan van het systeem gegeven wordt door $\hat{H} = \hat{S}_{2z}$ (i.e. de projectie van de spin van het tweede deeltje op de Z-as). Bepaal in dit geval de waarschijnlijkheid dat op een tijdstip $t > 0$ een meting van $\hat{\mathbf{S}}^2$ en $\hat{S}_z$ respectievelijk 15/4 en 1/2 geeft als uitkomsten.

Oplossing

(a) De totale spin voor deze gebonden toestanden kan de waarden $S = S_1 + S_2, S_1 + S_2 - 1, S_1 + S_2 - 2, ..., |S_1 - S_2|$ aannemen, wat wil zeggen dat $S = \frac{3}{2}$ of $S = \frac{1}{2}$.
De Clebsch-Gordon coëfficiënten worden bepaald door te beginnen met de toestand die hoort bij maximale waarden van S en M, namelijk $|S, M\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$:

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle = \left|1, \frac{1}{2}\right\rangle$$

met in het rechterlid de toestand in de niet-gekoppelde basis $|m_1, m_2\rangle$ (of $|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$).
Hierop passen we de ladderoperator $\hat{S}_- = \hat{S}_{1-} \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{S}_{2-}$ toe om de andere toestanden bij $S = \frac{3}{2}$ te vinden.
Zo vinden we:

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = \left|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Vervolgens zoeken we de toestand $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ die loodrecht staat op $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$:

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle$$

Hierop passen we opnieuw de ladderoperator toe en vinden we:

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle$$

Zo hebben we alle mogelijke toestanden in de gekoppelde basis uitgedrukt als functie van de eigenvectoren in de niet-gekoppelde basis.

(b) Het systeem bevindt zich op $t = 0$ in de toestand $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ en we willen de waarschijnlijkheid bepalen dat op een tijd $t > 0$ het systeem zich in de toestand $|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ bevindt. Deze laatste toestand is immers de toestand die overeenkomt met $S(S+1) = \frac{15}{4}$ en $M = \frac{1}{2}$.
Deze waarschijnlijkheid wordt gegeven door:

$$P\left(S(S+1) = \frac{15}{4}, M = \frac{1}{2}\right) = \left|\left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right| \left. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t \right\rangle\right|^2$$

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right\rangle$ stelt daarbij de toestand voor na tijd t. Deze toestand vinden we door de tijdsevolutieoperator toe te passen op de toestand bij $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t\right\rangle &= e^{-i\hat{H}t}\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle && (13)\\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\hat{S}_{2z}t}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\hat{S}_{2z}t}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle && (14)\\
&= \frac{e^{\frac{-it}{2}}}{\sqrt{3}}\left|0, \frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}e^{\frac{it}{2}}\left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle && (15)
\end{aligned}$$

Zo vinden we:

$$P\left(S(S+1) = \frac{15}{4}, M = \frac{1}{2}\right) = \left|\left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right| \left. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, t \right\rangle\right|^2 = \frac{8}{9}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$$