# 1. Langere vraag over de theorie

a) Beschrijf in detail het opladingsproces voor een condensator die in serie wordt geschakeld met een gelijkspanningsbron en met een weerstand (de inwendige weerstand van de gelijkspanningsbron mag verwaarloosd worden). Wat is de tijdsconstante van het opladings-proces voor deze RC-keten? Toon aan dat er behoud van energie is bij het opladingsproces.

b) Beschrijf in detail het ontladingsproces voor een condensator die in serie wordt geschakeld met een weerstand Wat is de tijdsconstante van het ontladingsproces voor deze RC-keten? Toon aan dat er ook bij het ontladingsprces behoud van energie is.

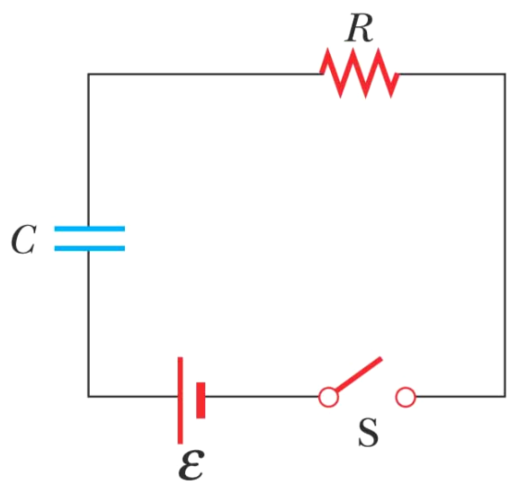
Deze eerste vraag peilt naar het "kennen" van de leerstof. Het antwoord is dan ook direct terug te vinden in de be-treffende PowerPoint presentatie.

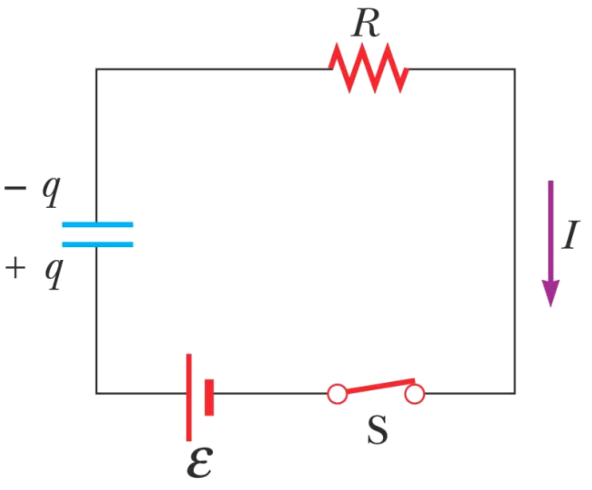
# Opplading van een RC-keten

- In een gelijkstroomketen met een weerstand en een condensator in serie, zal de stroom variëren in functie van de tijd.
- Wanneer de keten wordt gesloten met de schakelaar S op tijd $t = 0$, begint de condensator op te laden.
- De condensator blijft opladen totdat hij zijn maximale lading $Q$ bereikt:

$$Q = C\mathcal{E}$$

- Wanneer de condensator volledig is opgeladen, valt de stroom in de keten opnieuw naar nul.



# Oplading van een RC-keten, vervolg 1

- Op het moment dat de schakelaar gesloten wordt, is de lading op de condensator gelijk aan nul.
- Naarmate de platen van de condensator worden opgeladen, zal het potentiaalverschil over de condensator toenemen.
- Eens de maximale lading bereikt, zal de stroom in de keten terug gelijk aan nul worden.

  → Het potentiaalverschil over de condensator is dan in grootte gelijk aan het potentiaalverschil over de polen van de batterij ("open kring").
- Tweede regel van Kirchhoff toepassen voor de gesloten lus levert:

$$\mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - I(t)\,R = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - R\,\frac{dq(t)}{dt} = 0$$

→ Dit is een differentiaalvergelijking voor $q(t)$.

# Oplading van een RC-keten, vervolg 2

- We kunnen deze differentiaalvergelijking oplossen door “scheiding van de veranderlijken”:

$$\frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q(t)}{RC} - \frac{dq(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq(t)}{C\mathcal{E} - q(t)} = \frac{dt}{RC}$$

- Vervolgens integreren we beide leden van deze vergelijking tussen $t = 0$ en de tijd $t$ waarop de lading op de condensator de waarde $q$ heeft bereikt:

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

- Om $q(t)$ te vinden nemen we dan de $e$-macht van beide leden en kij-ken ook nog na of de oplossing voldoet aan het feit dat voor heel gro-te tijden de lading op de condensator gelijk wordt aan $Q = C\mathcal{E}$.

# Oplading van een RC-keten, vervolg 3

- De tijdsafhankelijkheid van de lading op de condensator wordt dan uiteindelijk:

$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

- Afleiden naar de tijd levert de tijdsafhankelijkheid van de stroom tijdens het opladen:

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} = I(t=0)\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

- We definiëren dan de **tijdsconstante** $\tau$ voor de RC-keten als

$$\boxed{\tau = RC}$$

# Oplading van een RC-keten, vervolg 4

- De tijdsconstante $\tau = RC$ komt overeen met de tijd die nodig is om de lading te verhogen van nul tot 63.2% van de maximale lading, dit is tot $Q = C\mathcal{E}\left(1-1/e\right)$. Gedurende diezelfde tijd is de stroom gereduceerd met een factor 1/$e$, dit is tot 36.8% van zijn initiële waarde (zie ook voorbeeld 26-11).
- We kunnen ook berekenen hoeveel energie de emk-bron heeft geleverd tijdens het opladen:

$$U_{\mathrm{emk}} = \int_0^{U_{\mathrm{emk}}} dU = \int_0^Q \mathcal{E}\,dq = \mathcal{E}\int_0^Q dq = Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

- Uit hoofdstuk 24 weten we wat de energie is die opgeslagen zit in de condensator:

$$U_{\mathrm{C}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

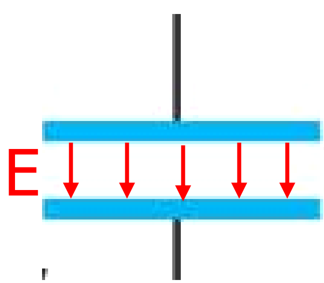
# Oplading van een RC-keten, vervolg 5

- Er werd ook energie gedissipeerd in de weerstand:

$$\int_0^{U_R} dU = \int_0^\infty P\,dt = \int_0^\infty I^2 R\,dt = \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2}{R^2} R\, e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\,\frac{RC}{2}\left(-e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^\infty\right) \quad \Rightarrow \quad U_R = \frac{C\varepsilon^2}{2}$$

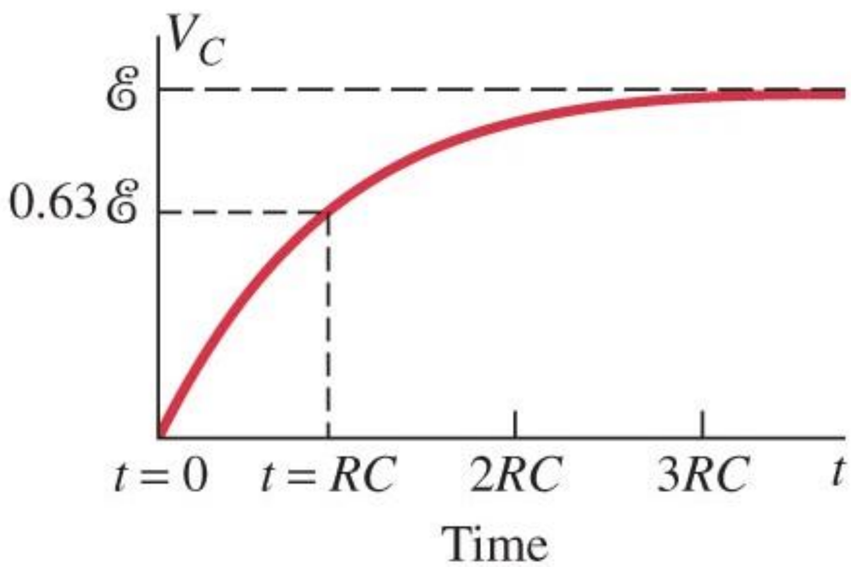
- De energie geleverd door de emk werd netjes verdeeld over de weerstand en de condensator!

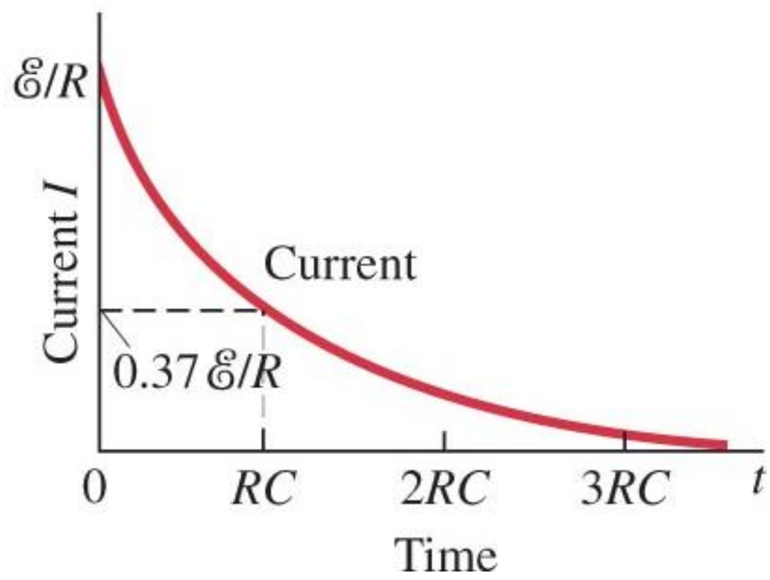



$$\boxed{U_{\mathrm{emk}} = U_C + U_R}$$

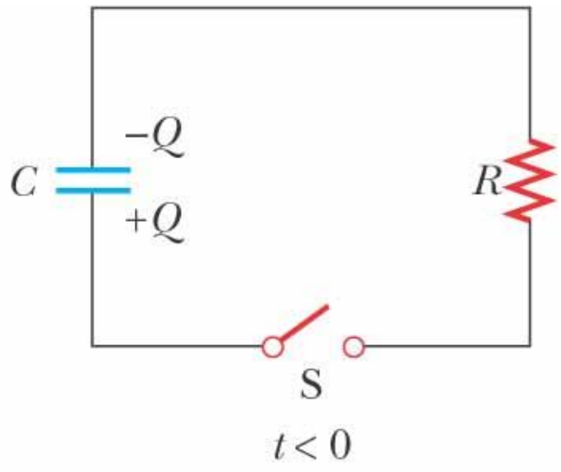
# Oplading van een RC-keten, vervolg 6

- We bekijken ook nog de grafische voorstelling van de tijdsafhankelijkheid van het potentiaalverschil over de condensator en de stroom in de keten:

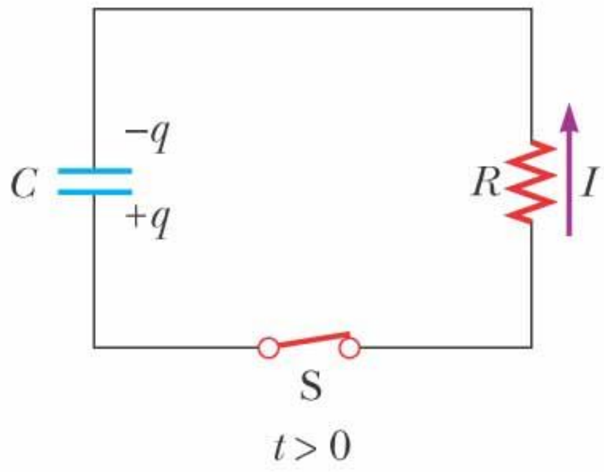


# Ontladen van een RC-keten




- Een opgeladen condensator met initiële lading $Q$ kan opnieuw worden ontladen.
- We tonen hierna aan dat het ontladen gebeurt met dezelfde tijdsconstante $\tau = RC$ als het opladen.
- Ook hier passen we de tweede regel van Kirchhoff toe voor de gesloten lus:




$$I(t)\,R + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \text{met} \quad I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad -R\,\frac{dq(t)}{dt} = \frac{q(t)}{C} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dq(t)}{q(t)} = \frac{dt}{RC}$$

# Ontladen van een RC-keten, vervolg 1

- We integreren tussen tijd nul en tijd $t$. In dit tijdsinterval vermindert de lading van $Q$ tot $q(t)$:

$$\int_{Q}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_{0}^{t} \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

- Voor de tijdsafhankelijkheid van de lading krijgen we dat

$$\boxed{q(t) = Q\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

- Dit levert dan voor de tijdsafhankelijkheid van de stroom dat

$$\boxed{I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} = I(t=0)\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

# Ontladen van een RC-keten, vervolg 2

- Bij $t = \tau = RC$ is de lading gereduceerd tot 0.368 $Q_{\text{max}}$. Met andere woorden, de condensator heeft dan 63.2% van zijn initiële lading verloren.
- De energiebalans van de RC-keten geeft dan dat

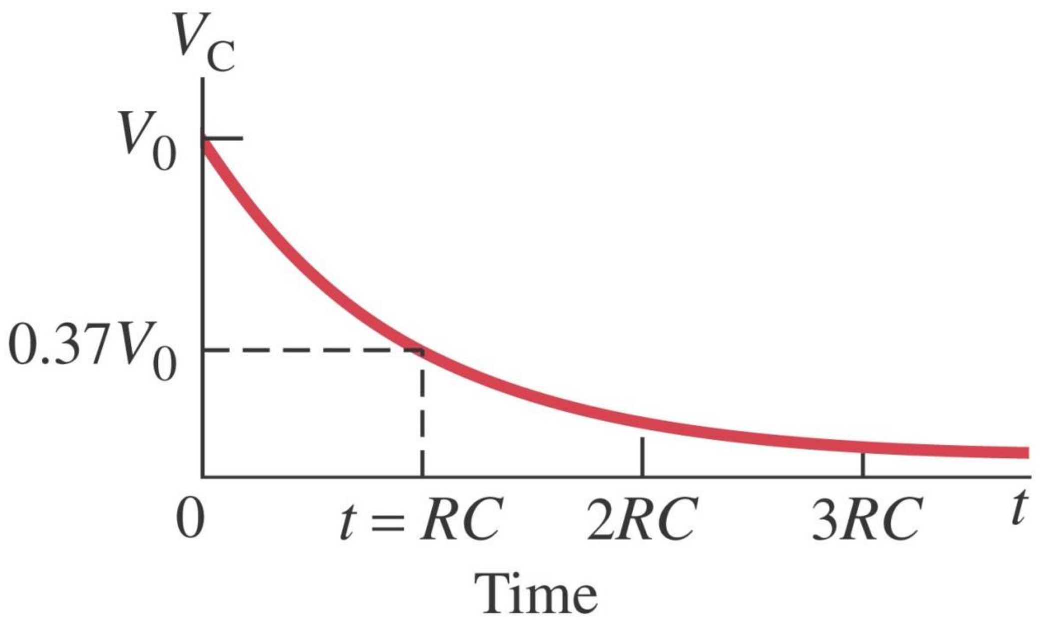
$$\int_0^{U_\mathrm{R}} dU = \int_0^{\infty} P\,dt = \int_0^{\infty} I^2 R\,dt = \frac{Q^2 R}{R^2 C^2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow \quad U_R = \frac{Q^2}{2C}$$

- De energie die oorspronkelijk opgeslagen was in de condensator, wordt bij het ontladen door de weerstand omgezet in warmte.

# Ontladen van een RC-keten, vervolg 3

- We bekijken ook nog de grafische voorstelling van de tijdsafhankelijkheid van het potentiaalverschil $V_C$ over de condensator die ontlaadt [$V(t = 0) = V_0$].



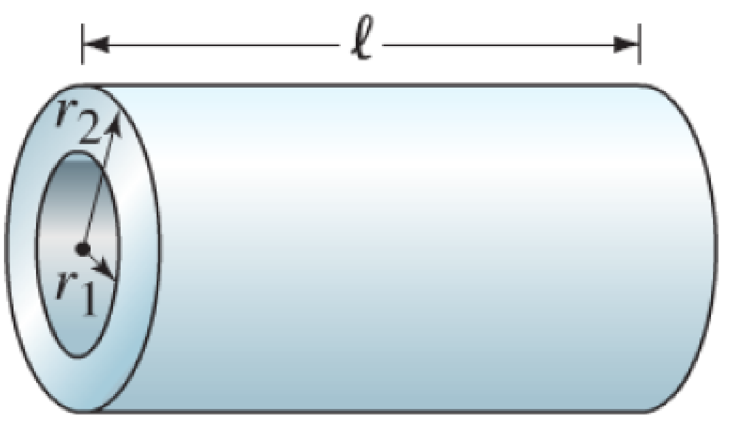
# 2. Oefening

Een holle cilindrische weerstand met binnenstraal $r_1$, buitenstraal $r_2$ en lengte $\ell$ bestaat uit een materiaal met resistiviteit $\rho$ (zie figuur).

1. Toon aan dat de weerstand voor stroom die radieel naar buiten beweegt gegeven wordt door

$$R = \frac{\rho}{2\pi\ell} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{1}$$

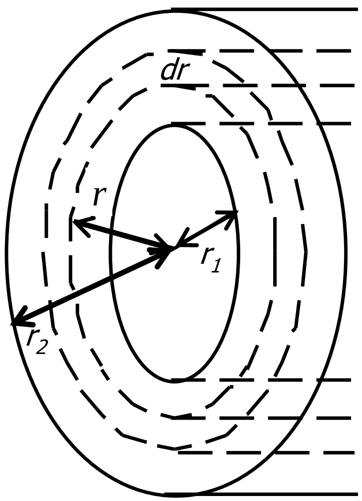
2. Bepaal de weerstand voor stroom die parallel aan de as van de cilinder beweegt.



Voor het oplossen van deel 1 van de oefening baseren we ons op de uitdrukking voor de elektrische weerstand als functie van de resistiviteit $\rho$, de lengte en de doorsnede van de weerstand:

$$R = \frac{\rho \times \text{lengte}}{\text{doorsnede}}$$

Voor een radieel vloeiende stroom moeten we de cilinder dan opdelen in een hele reeks van concentrische cilinders die op een infinitesimale afstand d$r$ van mekaar liggen. Voor twee naburige cilinders blijft de doorsnede zo goed als constant (de stroomdichtheid blijft ongeveer constant) en voor de weerstand tussen de twee cilinders vinden we




$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{2\pi r \ell}$$

De totale weerstand in de radiële richting is dan de som van de weerstandjes van al de gebiedjes tussen naburige cilinders (som wordt integraal):

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{2\pi r \ell} = \frac{\rho}{2\pi \ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\rho}{2\pi \ell} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Voor het oplossen van het tweede deel van de oefening betreffende de weerstand in de longitudinale richting maken we opnieuw gebruik van de uitdrukking

$$R = \frac{\rho \times \text{lengte}}{\text{doorsnede}}$$

In dit geval is opdelen in kleine stukjes niet nodig omdat de stroomdichtheid constant is (doorsnede is constant). We moeten dan voor de lengte gewoon de lengte $\ell$ van de cilindervormige weerstand nemen en voor de doorsnede het oppervlak tussen de binnenste (straal $r_1$) en de buitenste cilinder (straal $r_2$) . De weerstand wordt dan gegeven door

$$R = \frac{\rho \ell}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}$$

# 3. Vier kortere vragen

1. Twee deeltjes die ieder een massa van 3 mg hebben en een zelfde maar tegengestelde lading van 5 nC hebben, worden tegelijkertijd vanuit rust losgelaten op het moment dat ze 5.0 cm van mekaar verwijderd zijn. Wat is de snelheid van ieder van de deeltjes op het moment dat ze 2.0 cm van mekaar verwijderd zijn?

   a. 5.0 m/s
   b. 1.5 m/s
   c. 3.0 m/s
   d. 0 m/s
   e. 6.0 m/s

Mijn antwoord: b = 1.5 m/s

# Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

We maken gebruik van het behoud van energie (= kinetische energie + potentiële energie) en vergelijken de situatie in het begin (snelheid $v_i = 0$ en afstand $r_i = 5.0$ cm) met de situatie op het einde (snelheid $v_f$ en afstand $r_f = 2.0$ cm):

$$\text{totale energie} = 2 \times \frac{m v_i^2}{2} - \frac{k_e q^2}{r_i} = 2 \times \frac{m v_f^2}{2} - \frac{k_e q^2}{r_f}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{k_e q^2}{r_i} = m v_f^2 - \frac{k_e q^2}{r_f}$$

Zowel $q = 5$ nC, $m = 3$ mg, $r_i = 5$ cm als $r_f = 2.0$ cm zijn gegeven. Uit bovenstaande vergelijking kunnen we vervolgens de snelheid $v_f$ berekenen en we vinden dan oplossing b.

2. Het elektrisch veld in het getoonde gebied wordt gegeven door **E** = (8**i** + 2y**j**) N/C waarbij y in meter is. Wat is de grootte van de elektrische flux door het bovenvlak van de kubus in de figuur?

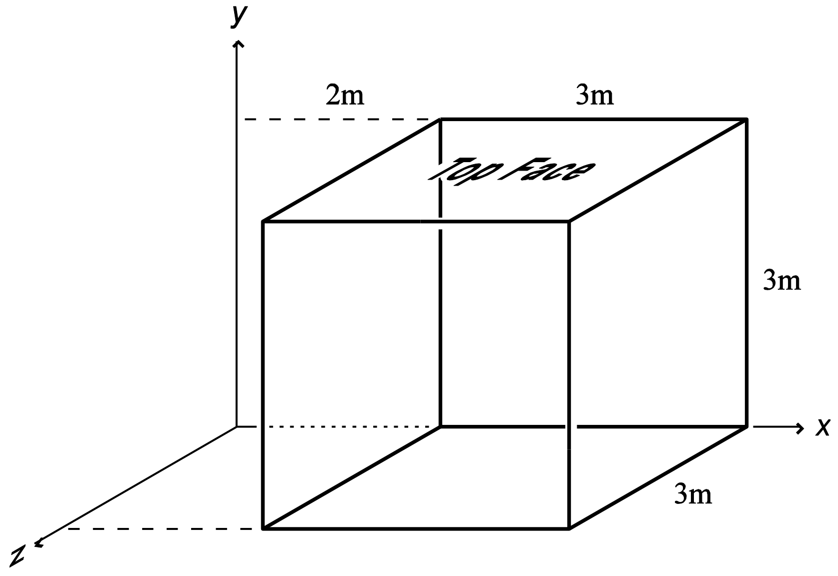
a. $90\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

b. $6\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

c. $54\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

d. $12\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

e. $126\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$




Mijn antwoord: c = $54\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

# Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

We gebruiken de definitie van de flux van het elektrisch veld:

$$\Phi_E = \iint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \iint \left(8\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}\right) \cdot dx\,dz\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = \iint 2y\; dx\,dz = 2y \iint dx\,dz = 6\,\mathrm{N/C} \times 9\,\mathrm{m}^2 = 54\,\mathrm{Nm^2/C}$$

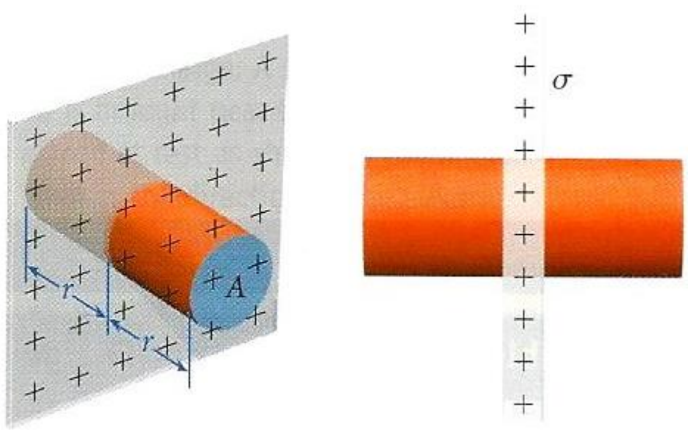
We bekomen dus antwoord c

3. Maak gebruik van de wet van Gauss om aan te tonen dat het elektrisch veld dicht bij een plaat met heel grote laterale afmetingen gegeven wordt door $\sigma/(2\varepsilon_0)$ met $\sigma$ de oppervlakteladingsdichtheid, en dit zowel voor een metalen plaat als voor een isolator met een homogene ladingsverdeling.

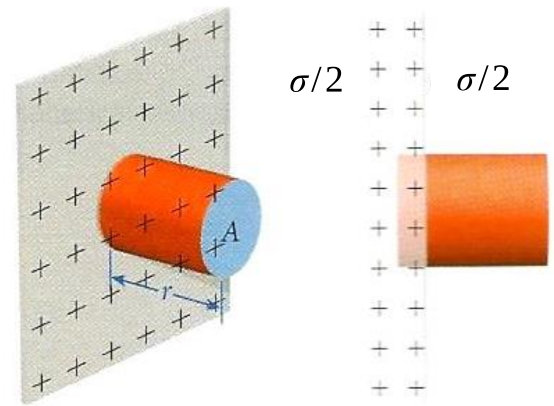
- Uit de symmetrie volgt dat voor de isolator én voor het metaal het veld buiten de platen loodrecht staat op de platen met ladingsdichtheid $\sigma$ en een constante grootte heeft dicht bij de platen.
- We kiezen als Gaussisch oppervlak een cilinder met as loodrecht op de platen. Het veld met grootte $E$ is telkens parallel met het gekromde deel van de cilinder dat dus geen bijdrage levert aan de elektrische flux. De flux door een uiteinde van de cilinder dat buiten de platen valt, is $EA$.
- Voor de isolator laten we beide uiteinden buiten de plaat vallen zodat de totale flux $2EA$ is en de totale omsloten lading $\sigma A$. Met de wet van Gaus wordt het veld dan $E = (\sigma A) / (2\mathrm{A}\varepsilon_0) = \sigma/(2\varepsilon_0)$.
- Voor het metaal zit de lading geconcentreerd aan ieder van de oppervlakken, terwijl $E = 0$ binnen in het metaal. Bij toepassen van de wet van Gauss laten we dan één van de uiteinden binnen in het metaal vallen (flux is nul) en het

andere uiteinde buiten de plaat, zodat de flux daar $EA$ is. Met de wet van Gauss wordt het veld dan $E = [(\sigma/2)A] / (A\varepsilon_0) = \sigma/(2\varepsilon_0)$, waarbij we de lading in twee gelijke delen hebben verdeeld tussen beide oppervlakken.

- Zoals aangegeven onderaan p. 598 en bovenaan p. 599 in het handboek, heeft het metaal een dubbel zo groot veld als we voor het definiëren van de ladingsdichtheid maar één enkel oppervlak van het metaal zouden beschouwen. Onderstaande figuren verduidelijken het antwoord.

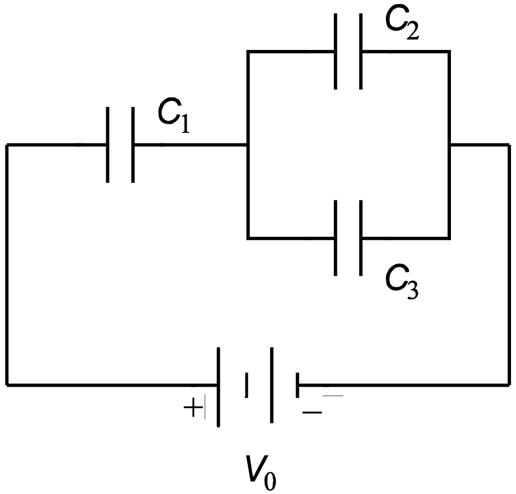



isolator




metaal

4. Bepaal de lading die opgeslagen zit op de condensator $C_1$ wanneer $C_1$ = 20 µF, $C_2$ = 10 µF, $C_3$ = 30 µF en met een door de batterij geleverde spanning $V_0$ = 18 V.




a. 0.37 mC

b. 0.24 mC

c. 0.32 mC

d. 0.40 mC

e. 0.50 mC

Mijn antwoord: b = 0.24 mC

## Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

- De condensatoren $C_2$ en $C_3$ staan in parallel en kunnen vervangen worden door een equivalente condensator met capaciteit $C_{par} = C_2 + C_3 = 10\ \mu F + 30\ \mu F = 40\ \mu F$.
- De condensator $C_{par}$ staat op zijn beurt in serie met de condenstor $C_1$ zodat de equivalente capaciteit voor het totale circuit gegeven wordt door $(1/C_{eq})^{-1} = (1/C_1)^{-1} + (1/C_{par})^{-1}$. We vinden dan dat $C_{eq} = 40/3\ \mu F$.
- De lading $Q$ die opgeslagen zit in het circuit wordt gegeven door $Q = C_{eq}V = 40/3 \times 18\ \mu C = 240\ \mu C$. Vermits we weten dat voor een serie-schakeling van twee condensatoren de lading op beide condensatoren dezelfde is, zal de lading op de condensator $C_1$ ook gelijk zijn aan $240\ \mu C = 0.24$ mC. $\rightarrow$ Antwoord b is correct.