1. Langere vraag over de theorie

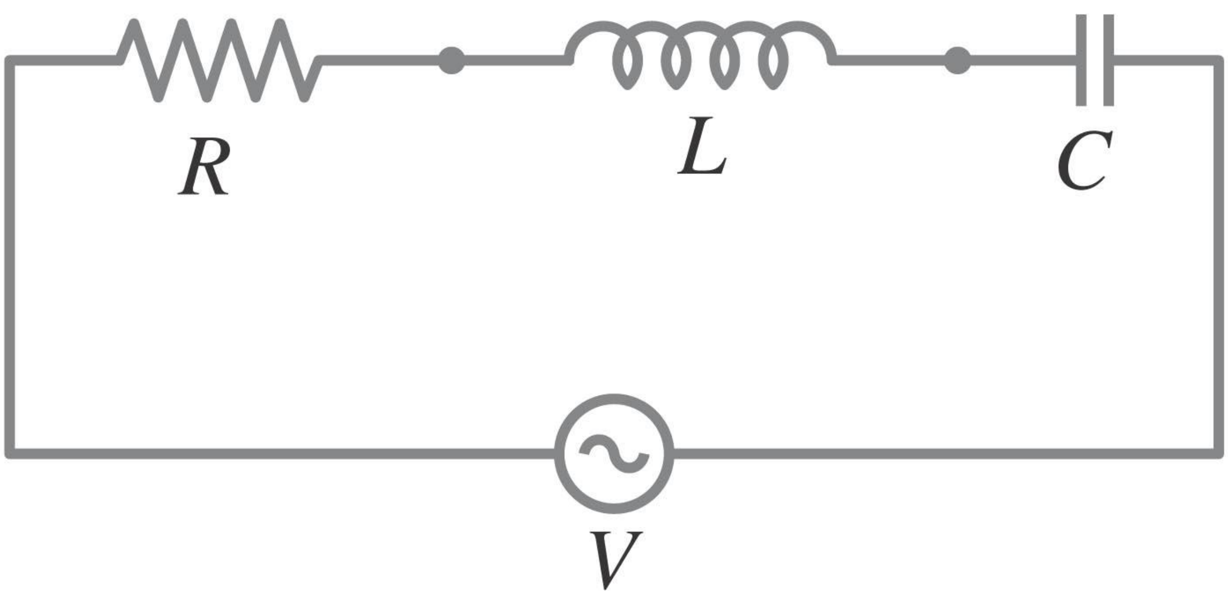
Maak gebruik van de methode van de fasoren (teken ook het betreffende diagramma) om het verband tussen stroom en spanning te bepalen in een LRC-kring die aangedreven wordt door een wisselspanning met hoekfrequentie ω. Hoe verloopt de stroom als functie van de hoek-frequentie ω en wanneer wordt deze stroom maximaal? Bereken ook het gemiddelde vermogen dat gedissipeerd wordt in de kring.

Deze eerste vraag peilt naar het “kennen” van de leerstof. Het antwoord is dan ook direct terug te vinden in de betreffende PowerPoint presentatie.

De RLC-kring met een ac-spanningsbron

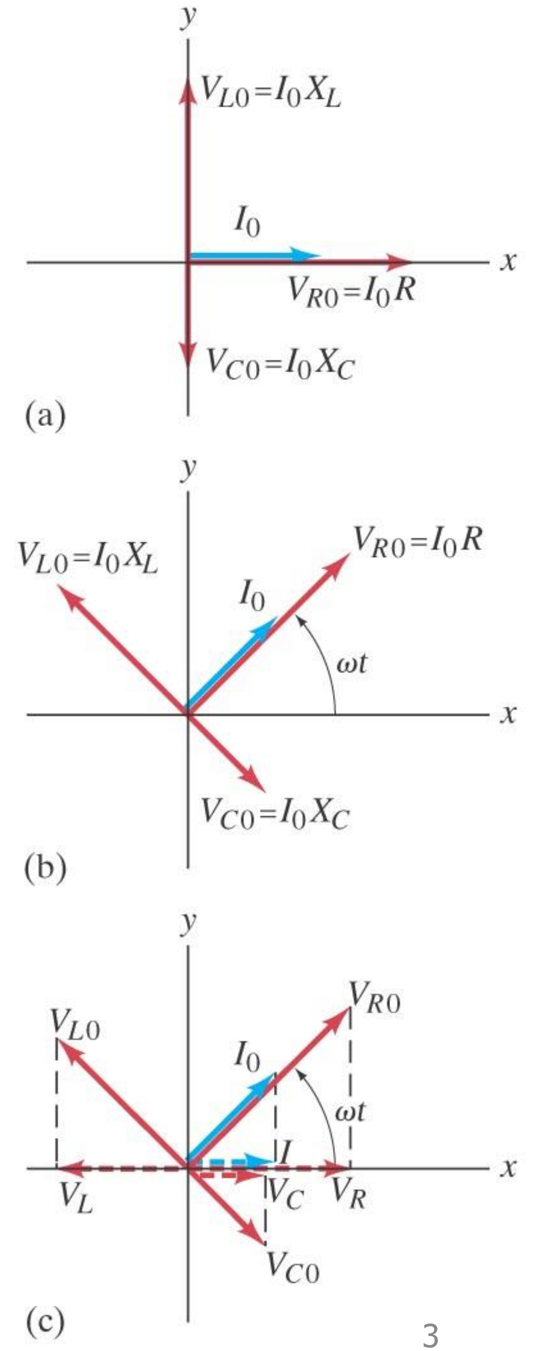
- Een weerstand R, een inductief element L en een capacitief element C zijn in serie geschakeld in een kring die gevoed wordt door een wisselspanningsbron.
- We werken met de stroom als referentie omdat die dezelfde is door al de elementen die in serie staan (behoud van lading):

$$I(t) = I_0 \cos(2\pi f t) = I_0 \cos(\omega t)$$



Vervolg 1 voor deze kring

- Terwijl de stroom overal in de kring dezelfde is, zijn de potentiaalverschillen over *R*, *L* en *C* verschillend, inclusief hun fase.
- We zouden in principe kunnen gebruik maken van de tweede wet van Kirchhoff om een differentiaalvergelijking te bekomen voor een gedwongen harmonische trilling die we kunnen oplossen zoals gedaan werd in hoofdstuk 14. Hier maken we echter zoals gevraagd gebruik van een alternatieve oplossingsmethode met behulp van een fasordiagramma.
- Elk van de drie potentiaalverschillen stellen we voor door een vector die roteert in het *x*,*y*-vlak.

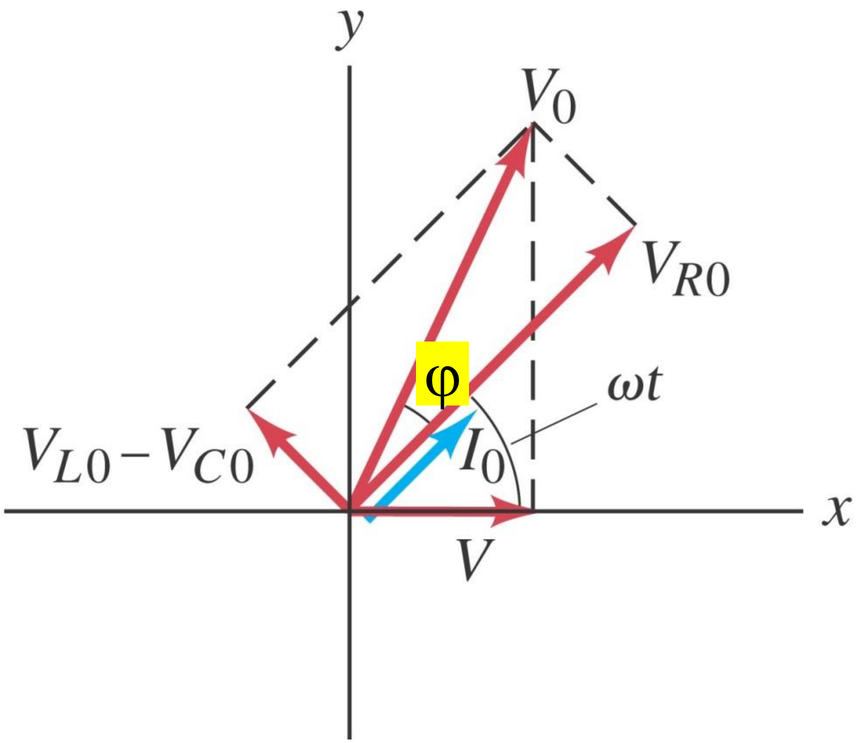


Vervolg 2 voor deze kring

- Voor de lengte van de vectoren geldt dat

$$V_{R0} = I_0 R \quad \text{en} \quad V_{L0} = I_0 X_L = I_0 \omega L \quad \text{en} \quad V_{C0} = I_0 X_C = \frac{I_0}{\omega C}$$

- De tijdsafhankelijkheid bekomen we door de vectoren te laten ronddraaien in tegen-uurwerkwijzerzin met een frequentie f. Na een tijd t is iedere vector gedraaid over een hoek ωt. De ogenblikkelijke waarde van de stroom en de potentiaalverschillen wordt op ieder moment gegeven door de projectie van de vectoren op de x-as (we nemen aan dat $X_L > X_C$).



Vervolg 3 voor deze kring

- De som van de drie projecties van de potentiaalverschillen levert de ogenblikkelijke waarde van het door de spanningsbron geleverde potentiaalverschil.
- De vectorsom van de drie potentiaalverschillen komt anderzijds overeen met de vector die de geleverde spanning voorstelt:

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

- Er is dus een faseverschil φ tussen het door de spanningsbron geleverde potentiaalverschil en de resulterende stroom door de kring.
- We definiëren dan de impedantie Z van de kring via

$$V_{\mathrm{rms}} = I_{\mathrm{rms}} Z \quad \text{en} \quad V_0 = I_0 Z$$

Vervolg 4 voor deze kring

- Met de regel van Pythagoras vinden we dat

$$V_0 = \sqrt{V_{R0}^2 + \left(V_{L0} - V_{C0}\right)^2} = I_0\sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2}$$

- De totale impedantie wordt dan gegeven door

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(X_L - X_C\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- De amplitude I_0 van de stroom is gelijk aan V_0/Z en wordt maximaal voor $\omega = (LC)^{1/2}$. In dat geval hebben we dat $I_0 = V_0/R$.
- De fase-hoek tussen stroom en spanning wordt gegeven door

$$\tan\varphi = \frac{V_{L0} - V_{C0}}{V_{R0}} = \frac{I_0\left(X_L - X_C\right)}{I_0 R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Vervolg 5 voor deze kring

- We kunnen dit ook schrijven als

$$\cos\varphi = \frac{V_{R0}}{V_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}$$

- Zoals hiervoor aangegeven, wordt er netto geen energie gedissipeerd in de spoel of in de condensator. Er wordt wel energie gedissipeerd in de weerstand. Het gemiddelde vermogen dat gedissipeerd wordt in de weerstand is (zie uitdrukking voor $\cos\varphi$ hierboven)

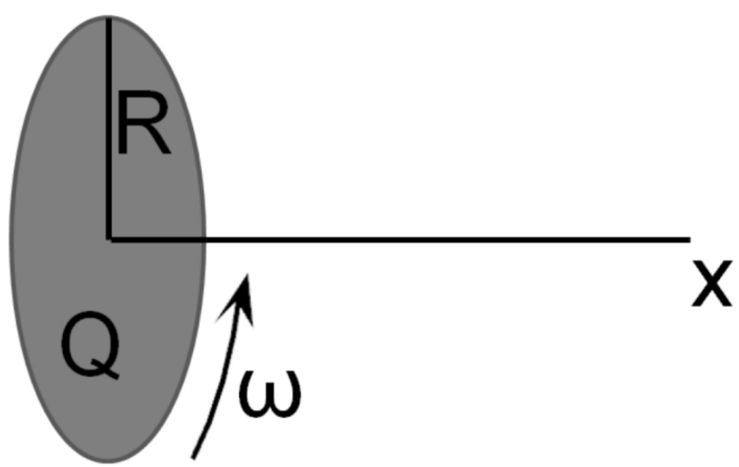
$$\overline{P} = I_{\mathrm{rms}}^2 R = I_{\mathrm{rms}}^2 Z \cos\varphi = I_{\mathrm{rms}} V_{\mathrm{rms}} \cos\varphi$$

- De factor $\cos\varphi$ wordt de vermogensfactor van de kring genoemd. Voor een zuiver resistieve kring (stroom en spanning zijn in fase) wordt deze factor gelijk aan 1. Als er zich enkel inductieve en capacitieve elementen in de kring bevinden, is deze factor gelijk aan 0.

2. Oefening

Op een niet geleidende schijf met straal R en verwaarloosbare dikte bevindt zich een uniform verdeelde elektrische lading Q. De schijf wordt aan het draaien gebracht met angulaire snelheid ω rond een as door het midden van de schijf en loodrecht op de schijf (zie onderstaande figuur). Bepaal

1. het magnetisch dipoolmoment van dit systeem,
2. het magnetisch veld in een punt op een afstand x van het middelpunt van de schijf langsheen de as die loodrecht op de schijf staat en door het middelpunt gaat.

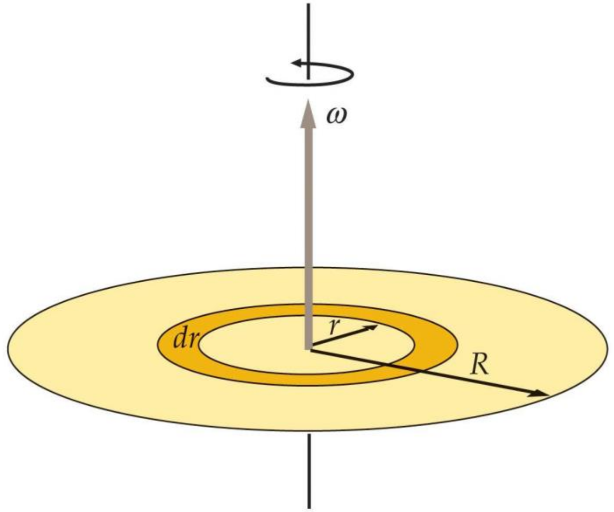


1. Berekenen van het magnetisch moment μ van de roterende schijf:

- Totale lading op de schijf: $Q = \sigma \times (\pi R^2)$, met σ de oppervalkte-ladingsdichtheid.
- Verdeel de schijf in concentrische ringen met breedte dr.
- Periode van de rotatie: $T = 2\pi/\omega$.
- Stroom in de ring: $\mathrm{d}I = \mathrm{d}Q \times \mathrm{T} = \sigma \times (2\pi r\,\mathrm{d}r) \times \omega/2\pi = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$.
- Magnetisch moment van de ring: $\mathrm{d}\mu = \mathrm{d}I \times (\pi r^2) = \pi\sigma\omega r^3\mathrm{d}r$
- Magnetisch moment van de schijf:

$$\mu = \int_0^R \pi\sigma\omega r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}\sigma\omega R^4$$

$$= \frac{Q\omega R^2}{4}$$



2. Berekenen van het magnetisch veld B in een punt langsheen de as:

- Verdeel de schijf opnieuw in concentrische ringen met breedte dr.
- Uit deel 1 halen we dat de stroom in dergelijke ring gegeven wordt door $\mathrm{d}I = \sigma\omega r\,\mathrm{d}r$.
- De bijdrage van de ring aan het veld in een punt op de as kunnen we halen uit het formularium, waar het veld langsheen de as van een stroomvoerende ring wordt gegeven. Met $R = r$ en $I = \mathrm{d}I$ levert de vergelijking uit het formularium dat

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I\,r^2}{2\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma\omega r^3 \mathrm{d}r}{2\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

- Het veld van de roterende schijf vinden we dan door integratie van de bijdragen dB tussen 0 en R:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma\omega r^3}{2\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

- De integraal kunnen we oplossen door van de veranderlijke r voor de integratie over te gaan naar de veranderlijke $u^2 = r^2 + x^2$. We kunnen de integraal dan herschrijven en uitrekenen:

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega r^3}{2\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r = \int_0^R \frac{\mu_0 \sigma \omega \left(r^2\right)\left(r\,\mathrm{d}r\right)}{2\left(r^2 + x^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_x^{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} \frac{\mu_0 \sigma \omega \left(u^2 - x^2\right)\left(u\,\mathrm{d}u\right)}{2u^3}$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2}\left(\int_x^{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} \mathrm{d}u - \int_x^{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} \frac{x^2}{u^2}\,\mathrm{d}u\right)$$

- Dit levert dan uiteindelijk het gezochte resultaat voor het magneet-veld B:

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(u \Big|_x^{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} + \frac{1}{u} \Big|_x^{\left(R^2+x^2\right)^{1/2}} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\sqrt{R^2+x^2} - x + \frac{x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{x^2}{x} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{R^2+x^2+x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - x + \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - x \right)$$

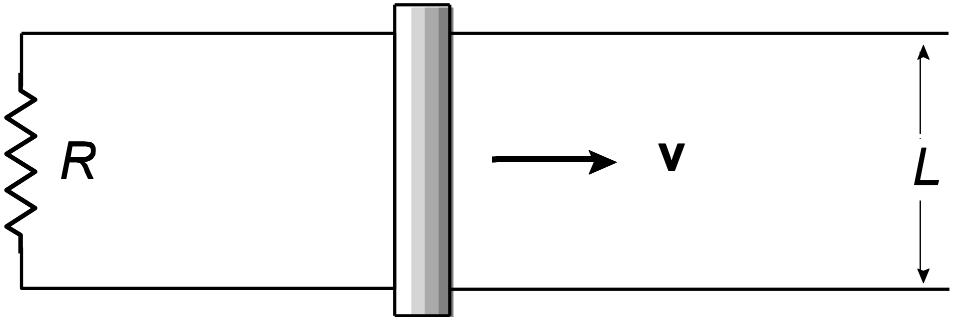
$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - 2x \right) = \frac{\mu_0 Q \omega}{2\pi R^2} \left(\frac{R^2+2x^2}{\sqrt{R^2+x^2}} - 2x \right)$$

- Rekening houdend met de rotatierichting van de schijf, wijzen het magnetisch dipoolmoment en het veld in de $+x$-richting.

3. Vier kortere vragen

- Een staaf (lengte L = 10 cm) beweegt op twee horizontale, wrijvingsloze geleidende rails zoals getoond in onderstaande figuur. Een magneetveld staat loodrecht op het vlak van de rails en is homogeen en constant. Als een constante kracht van 1.0 N de staaf met een constante snelheid van 2.0 m/s voortbeweegt, wat is dan de stroom door de weerstand van 8 Ω?

a. 0.50 A
b. 0.25 A
c. 1.00 A
d. 0.00 A
e. 0.10 A



Mijn antwoord: a = 0.50 A

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

- We gebruiken de vergelijking voor de kracht die in het formularium staat aangegeven:

$$F = I\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R}$$

- We gebruiken eerst het tweede deel van de vergelijking om het magnetisch veld B te berekenen:

$$1.0 = \frac{B^2 \times 0.10^2 \times 2}{8}$$

- Oplossen naar B levert dan

$$B^2 = \frac{1.0 \times 8}{0{,}10^2 \times 2}\,\mathrm{T}^2 = 400\,\mathrm{T}^2 \qquad \Rightarrow \qquad B = \sqrt{400}\,\mathrm{T} = 20\,\mathrm{T}$$

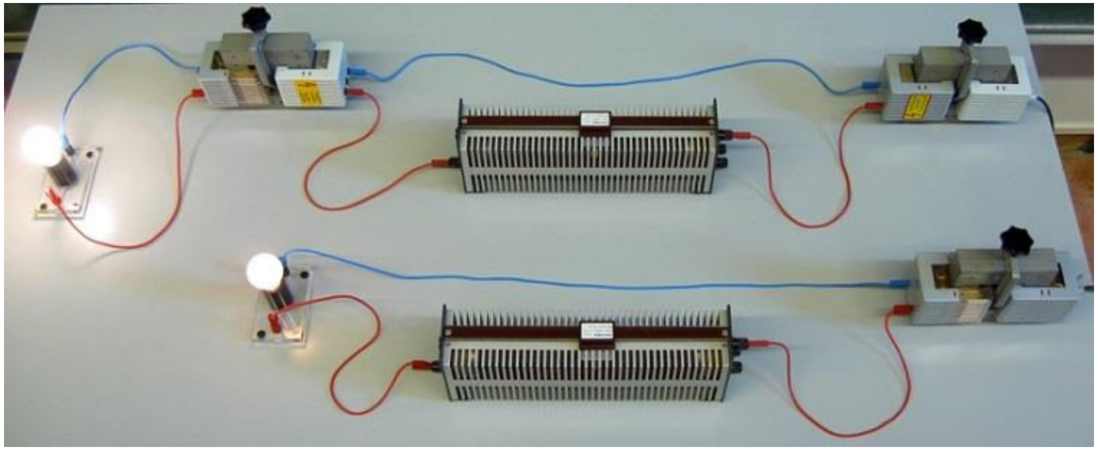
Mijn verantwoording van het gekozen antwoord, vervolg:

- Vervolgens gebruiken we het eerste deel van de vergelijking uit het formularium:

$$I = \frac{F}{B\ell} = \frac{1.0}{20 \times 0.10}\ \mathrm{A} = 0.50\ \mathrm{A}$$

- Antwoord (a) is dus het correcte antwoord.
- Er is ook een alternatieve, kortere oplossingsmethode, waarbij men het geleverd vermogen $F \times v$ om de staaf te bewegen gelijk stelt aan de Joulse opwarming RI^2. Hieruit blijkt ook duidelijk dat de lengte van de bewegende staaf geen invloed heeft op het resultaat.

2. Bij onderstaande proefopstelling kunnen we bij het bovenste circuit met behulp van transformatoren een elektrische spanning verhogen en ze na doorgang door een regelbare schuifweerstand opnieuw verlagen. Deze ogenschijnlijk neutrale ingreep laat ons toe om te demonstreren hoe verliezen door Joulse opwarming aanzienlijk kunnen verlaagd worden door de elektrische energie te transporteren via hoogspanningsleidingen. Toon aan dat dit inderdaad het geval is.



Waarom zijn er sterk verlaagde verliezen door Joulse opwarming bij transport via een hoogspanningsleiding?

Het loont inderdaad om met behulp van een transformator de elektrische spanning die geleverd wordt door een elektriciteitscentrale, eerst aanzienlijk op te voeren alvorens de elektrische energie over grotere afstanden te transporteren naar de verbruiker. Dat dit zo is kan begrepen worden aan de hand van de uitdrukking voor de Joulse opwarming in de spanningslijn (zie hoofdstuk 25):

$$P_{Joule} = V \times I \ = \ R \times I^2$$

De weerstand *R* van de spanningslijn wordt bepaald door de resistiviteit van het gebruikte metaal en de afmetingen. Het metaal is duur zeker als men koper met een lage resistiviteit gebruikt. Men wil dus zo weinig mogelijk metaal gebruiken en dan zal de weerstand *R* niet anders zijn als men hoogspanning of laagspanning gebruikt, met andere woorden *R* ligt vast wanneer men vermogens vergelijkt.

Waarom zijn er sterk verlaagde verliezen door Joulse opwarming bij transport via een hoogspanningsleiding? – vervolg

Anderzijds ligt het door de centrale geleverde vermogen P_{gel} ook vast. De stroom door de spanningslijn wordt dan gegeven door

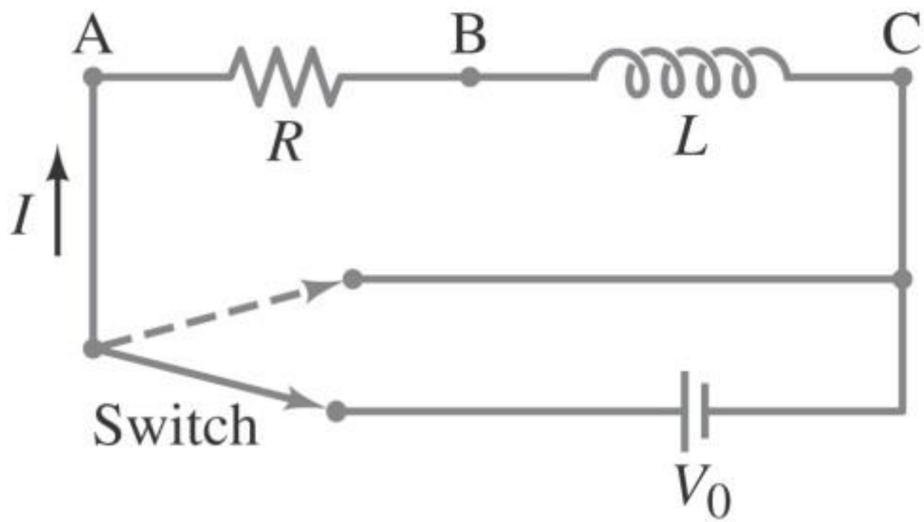
$$I = \frac{P_{gel}}{V}$$

De Joulse opwarming wordt hiermee

$$P_{Joule} = V \times I = R \times I^2 = R \times \left(\frac{P_{gel}}{V} \right)^2$$

Dit resultaat leert ons dat de Joulse opwarming omgekeerd evenredig varieert met het kwadraat van de gebruikte spanning. Een verhoging van de spanning met een factor 100 (22 000 V in plaats van 220 V) reduceert de Joulse verliezen met een factor 10 000 ! De hier vermelde stromen, spanningen en vermogens zijn steeds de rms-waarden.

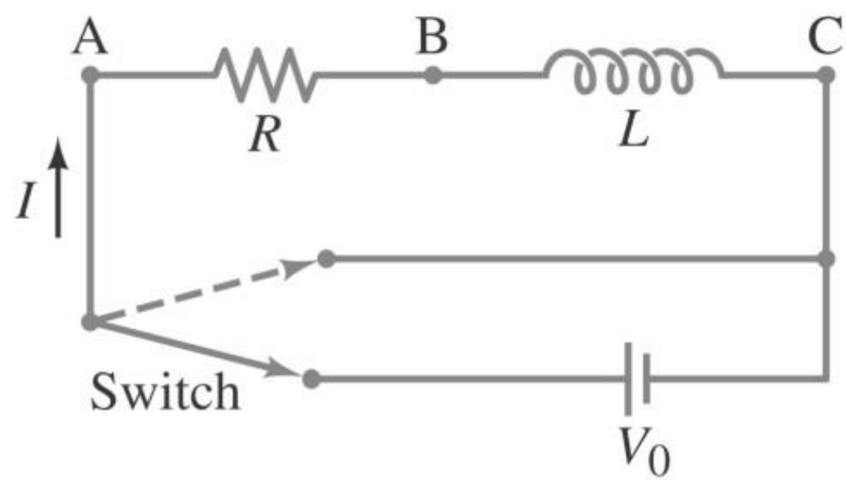
3. In onderstaande kring bevindt de schakelaar zich aanvankelijk in de onderste positie (circuit is verbonden met de batterij). Hoe hangt de energie die bij deze stand opgeslagen zit in de spoel L af van de spanning V_0 nadat de stroom een constante waarde bereikt heeft?



Mijn berekening van de energie opgeslagen in de spoel:

- Wanneer de schakelaar zich in de onderste stand bevindt, zal de stroom de verzadigingswaarde $I = V_0/R$ bereiken (zie pagina 791 in het handboek). Er zit dan een magnetische energie $\frac{1}{2} L I^2$ opgeslagen in de spoel die we kunnen herschrijven als $\frac{1}{2} L (V_0/R)^2$.

4. Deze vierde korte vraag sluit direct aan bij de vorige korte vraag. We beschouwen hetzelfde circuit, maar nu nadat de schakelaar in de bovenste positie wordt gezet. Toon aan dat de energie die dan in de weerstand R wordt gedissipeerd, gelijk is aan de energie die in de spoel met inductantie L opgeslagen zat wanneer de schakelaar zich in de onderste positie bevond.



Mijn berekening van de energie gedissipeerd in de weerstand:

- Wanneer de schakelaar in de bovenste stand wordt gebracht zal de stroom exponentieel naar nul vallen vanaf een initiële waarde I_0 (zie pagina 791 in het handboek en formularium) met tijdsconstante $\tau = L/R$:

$$I(t) = I(t=0)\, e^{-\frac{t}{\tau}} = I_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Bij het exponentieel naar nul vallen van de stroom wordt de in de spoel opgeslagen magnetische energie ½ $L I_0^2$ gedissipeerd onder de vorm van warmte (Joule-effect) in de weerstand R.

Mijn berekening van de energie gedissipeerd in de weerstand, vervolg:

- De energie die wordt omgezet in warmte, bekomen we door het in de weerstand ontwikkelde vermogen te integreren naar de tijd:

$$\int_0^\infty RI^2(t)\,dt = \int_0^\infty RI_0^2\, e^{-\frac{2t}{\tau}}\, dt = -\frac{R\tau I_0^2}{2}\, e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^\infty = \frac{RLI_0^2}{2R} = \frac{LI_0^2}{2}$$

- De ontwikkelde warmte in de weerstand komt dus inderdaad over-een met de magnetische energie die initieel was opgelagen in de spoel.