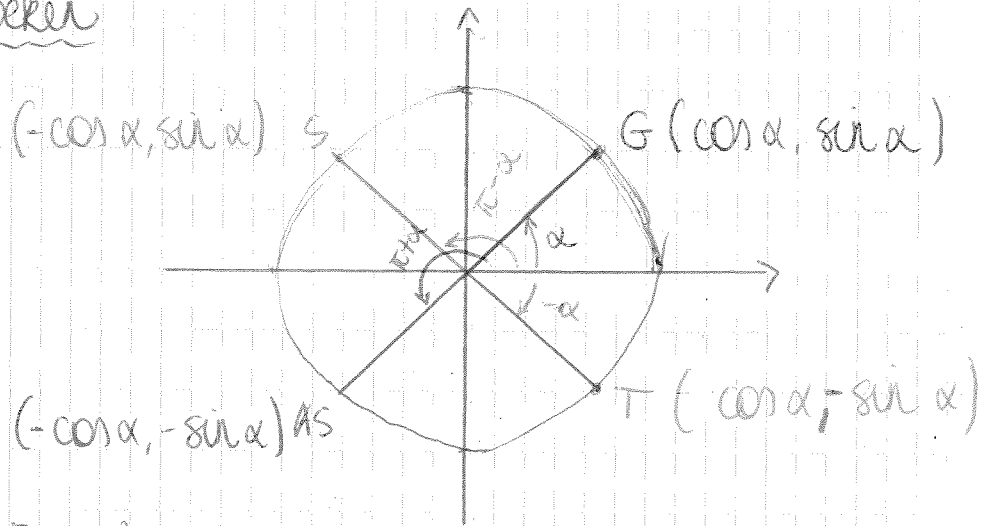


④ verwante hoeken



$$\rightarrow \text{CH} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

⑤ oef

$$\checkmark \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\checkmark \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X \checkmark \sin\left(-\frac{28\pi}{3}\right) = \sin -\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} ; \cos -\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\checkmark \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\checkmark \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} ; \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$$

$$\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi = 1\pi$$

~~scribbles~~

~~scribbles~~

~~scribbles~~

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Verhalingsopg. rekenen

oef 1

1) $|3x-2| < 5$

$$-3x+2 < 5 < 3x-2$$

$$-3x+2 < 5$$

$$x > -1$$

$$5 < 3x-2$$

$$\frac{7}{3} < x$$

$$x \in]-1, \frac{7}{3}[$$

2) $|3-2x| < 1$

$$-3+2x < 1$$

$$x < 2$$

$$1 < 3-2x$$

$$\frac{-2}{-2} > x$$

$$x \in]-\infty, 1[$$

3) $|\sqrt{x}+3| < 9$

$$-\sqrt{x}-3 < 9$$

$$\sqrt{x} > 12$$

$$x > 144$$

$$9 < \sqrt{x}+3$$

$$6 < \sqrt{x}$$

$$36 < x$$

$$x \in]144, +\infty[$$

4) $\left| \frac{9-\sqrt{1+20x}}{10} \right| < 1$

$$\frac{-9+\sqrt{1+20x}}{10} < 1$$

$$\sqrt{1+20x} < 19$$

$$1 < \frac{9-\sqrt{1+20x}}{10}$$

$$-1 > \sqrt{1+20x}$$

$$|x| < 0$$

$$-x < 0 < x$$

$$|x-2| < 0$$

$$-(x-2) < 0 < x-2$$

$$\left(\frac{9-\sqrt{1+20x}}{10} \right) \cdot x$$

$$\frac{9x-x\sqrt{1+20x}}{10}$$

$$5) \left| 5 - \frac{2}{x} \right| > 1$$

$$-5 + \frac{2}{x} > 1$$

$$1 > 5 - \frac{2}{x}$$

$$\frac{2}{x} > 6$$

$$-4 > -\frac{2}{x}$$

$$2 > 6x$$

$$+4x < 2$$

$$\frac{1}{3} > x$$

$$x < \frac{1}{2}$$

$$x \in]-\infty, \frac{1}{3}[$$

$$6) (x+3)(x-2)(x-4) < 0$$

~~$$(x^2 - 2x + 3x + 6)(x-4) < 0$$~~

~~$$(x^2 + x + 6)(x-4) < 0$$~~

~~$$(x^3 - 4x^2 + x^2 - 4x + 6x - 24) < 0$$~~

~~$$x^3 - 3x^2 + 2x - 24 < 0$$~~

x	-3	2	4
(x+3)(x-2)	-	0	+
(x-4)	-	0	-
	-	+	-

$$x \in]-\infty, -3[\cup]2, 4[$$

$$7) \frac{2x+1}{x+3} > 3$$

x	-3	-1/2	3
T	-	-	0
N	-	0	+
$\frac{2x+1}{x+3}$	+	-	0

$$x \in]3, +\infty[$$

$$8) \begin{aligned} x^2 &\geq 3x - 2 \\ x^2 - 3x + 2 &\geq 0 \\ (x-1)(x-2) &\geq 0 \end{aligned}$$

x	1	2
$(x-1)(x-2)$	$+ \quad 0$	$- \quad 0 \quad +$

$$x \in]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

$$9) \begin{aligned} \eta x^2 + x - \eta &= 0 \\ (x-1)(x+\eta) &= 0 \rightarrow x \in \{1, -\eta \mid \eta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

x	$-\eta$	1
$(x-1)(x+\eta)$	$+ \quad 0$	$- \quad 0 \quad +$

$$10) \begin{aligned} e^{2x} + e^x - 6 &= 0 \\ t^2 + t - 6 &= 0 \end{aligned}$$

$$e^x = t$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

$$(t-2)(t+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x - 2)(e^x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \quad \vee \quad e^x + 3 = 0$$

$$e^x = 2$$

$$e^x = -3$$

$$x = \ln 2$$

/

$$11) e^x - 4e^{-x} = 3$$

We moeten 3 krantenartikelen zoeken (plant gerelateerd)

→ PORTFOLIO

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx = \int x^{-1/2} = \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} + C$$

$$\rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} x^{3/2} + C$$

$$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

8/10/2019

Voorkennisles 2: wiskunde 1

expon

* schets grafiek:

$$x \mapsto 2^x$$

$$x \mapsto 2^{-x}$$

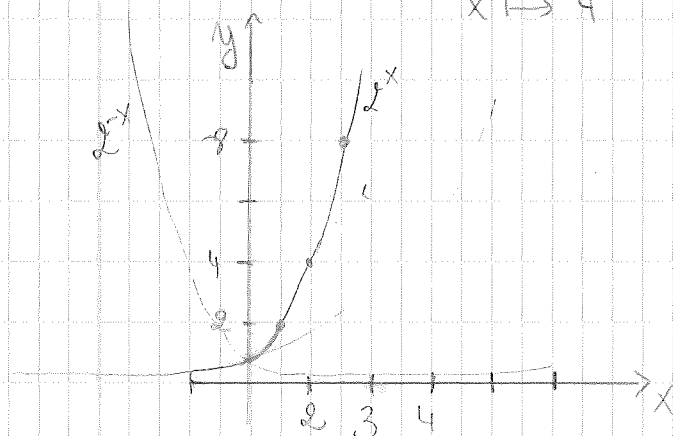
$$x \mapsto \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$$

$$x \mapsto 4^x$$

$$x \mapsto 5000^x$$

$$x \mapsto 1^x$$

$$x \mapsto \frac{1}{2^{-x}} = 2^x$$



a w hoger $\Rightarrow$ graf. stijgt sneller

a w kleiner $\Rightarrow$ graf. stijgt trager.

! $a > 1 \Rightarrow$ functie stijgt sterk

log

* $a \in \mathbb{R}_0^+$, $a \neq 1$, dan geldt:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$\hookrightarrow a^{\log_a x} = x \quad \text{en} \quad \log_a a^x = x$$

$$\hookrightarrow \log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

$$\hookrightarrow \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

$$\hookrightarrow \log_a (x^r) = r \cdot \log_a x$$

$$\hookrightarrow \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad ; \quad \log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$$

$$\Rightarrow a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

* los op: $\rightarrow 5^x = 7 \Leftrightarrow x = \log_5 7$

$$\rightarrow \ln(x^3) = -1 \Leftrightarrow 3 \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1/3$$

$$\Leftrightarrow e^{-1/3} = x$$

$$\rightarrow \log_5 125 = 3$$

$$\rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$$

$$\rightarrow \log 0,00001 = -5$$

oef 1:

oef 3

$$9) \log(c^3 \sqrt{\frac{a}{b}}) = 3 \log c + \log \sqrt{\frac{a}{b}} = 3 \log c + \frac{1}{2} \log \frac{a}{b}$$

$$= 3 \log c + \frac{1}{2} \log a - \frac{1}{2} \log b$$

$$10) \log \frac{a^4 bc}{\sqrt{bc^2}} = \log a^4 bc + \log \sqrt{bc^2}$$

$$= 4 \log a + \log b + \log c + \frac{1}{2} \log b + \log c$$

oef 4

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x = 2^x (2^x - 5) = 24$$

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$t^2 - 5t - 24 = 0 \quad 2^x = t$$

$$D = 25 + 4 \cdot 24 = 25 + 96 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{2} \begin{matrix} 8 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 8$$

$$x = 3$$

$$\text{of } 2^x = -3$$

$$\Rightarrow \text{bestaat nt}$$

ex. 5

$$11) \log(x+1) - \log x^2 + \frac{1}{2} \log(x-3)$$

$$= \log\left(\frac{x+1}{x^2}\right) + \frac{1}{2} \log(x-3) = \log\left(\frac{x+1}{x^2} \sqrt{x-3}\right)$$

$$12) 3 - \log x = \log\left(\frac{10^3}{x}\right)$$

$$13) 5 \log(x-1) - \frac{1}{2} \log(x+3) = \log\left(\frac{(x-1)^5}{\sqrt{x+3}}\right)$$

ex. 6

$$\begin{aligned} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \log(k^2 - 1) - \log k^2 \\ &= \log((k-1)(k+1)) - 2 \log k \\ &= \log(k-1) + \log(k+1) - 2 \log k \end{aligned}$$

ex. 7

$$14) \log \frac{a}{b} - \log \frac{c}{d} = -\log \frac{b}{d} + \log \frac{a}{c}$$

$$\begin{aligned} &\hookrightarrow \log a - \log b - \log c - \log d \\ &= \log a - \log c - \log b - \log d \\ &= \log \frac{a}{c} - \log \frac{b}{d} \end{aligned}$$

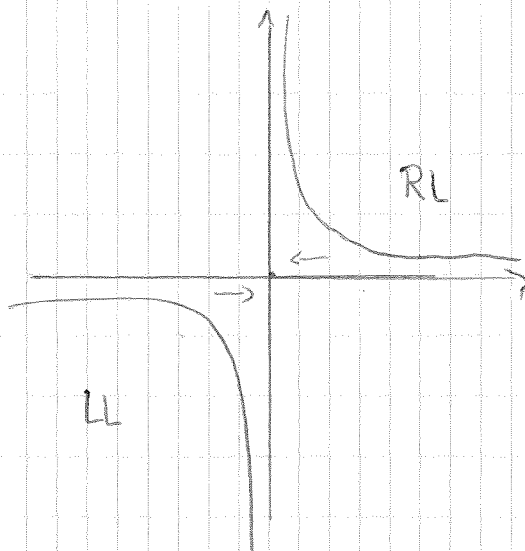
$$15) -\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b} = -\log \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{-\log 1}_{0} - \log a + \underbrace{\log 1}_{0} - \log b = -\log \frac{b}{a} \end{aligned}$$

limieten * $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = ? \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$$



Dus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ bestaat niet want $RL \neq LL$

* rekenregels!

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \text{ als } f \text{ continu is}$$

* onbepaalde vormen: $\infty - \infty$ | $\frac{\infty}{\infty}$ | $0 \cdot \infty$
 $\frac{0}{0}$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2) = \infty - \infty \text{ ONBEP. !}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 (2 - 5/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - 5/x) = \infty \cdot 2 = \infty$$

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 6x + 1}{2x^2 + 11x - 8} = \frac{3}{2} \left(= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 (3 - 6/x + 1/x^2)}{x^2 (2 + 11/x - 8/x^2)} \right)$$

Def 1

Def 1.2

$$(a) (i) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{1/x}) =$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{1/x}) =$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$(vi) \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$(vii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x =$$

$$(viii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$(b) (i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} =$$

**Opmerkingen in de les
Hoofdstuk 1**

1. [§1.4] Schrijf het volgende quotient van complexe getallen in de vorm $x+iy$:

$$\frac{2+i}{3-i}$$

Uitleg: Het complex toegevoegde van de noemer is $\overline{3-i} = 3+i$. Vermenigvuldigen we het quotient met 1, geschreven als $\frac{3+i}{3+i}$:

$$\frac{2+i}{3-i} = \frac{2+i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{6-1+3i+2i}{9+1} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}.$$

Wiskunde I

Voor 1ste fase Bachelor in de
Biochemie & Biotechnologie, Biologie, Chemie,
Geografie, Geologie, Informatica

en voor Schakelprogramma:
Master in de Chemie,
Master in de Toegepaste Informatica

Marco Zambon

KU Leuven, 2019-20

Wiskunde I

Wiskunde I

WISKUNDE I

Colleges (theorie)

- ▶ **Marco Zambon** marco.zambon@kuleuven.be
- ▶ **donderdag van 16:15u tot 18u in GRAU 00.10 (grote aula).**
Alleen op 3 oktober: in PDS (Pieter de Somer aula).
- ▶ **op woensdag 30 oktober van 18:15u tot 20:15u in PDS.**

Wiskunde I

Wiskunde I

WISKUNDE I

Monitors (Studiebegeleiding)

- ▶ **Katelijne Caerts** katelijne.caerts@kuleuven.be

Oefenzittingen

- ▶ **Door assistenten ...**
- ▶ **2 oefenzittingen van 1,5 uur per week**
- ▶ **Vanaf week 2**

Wiskunde I

Wiskunde I

Cursustekst en Toledo

Cursustekst

- ▶ Wiskunde I,
- ▶ Verkrijgbaar bij de cursusdienst van Scientica
- ▶ Ook beschikbaar op Toledo
- ▶ Enige wijziging ten opzichte van cursus van vorig jaar: §10.8 werd toegevoegd (paginas 268-269)

Toledo

- ▶ Zelfstudie + Oefeningen
- ▶ Cursustekst
- ▶ Transparanten
- ▶ Studiebegeleiding...

Wiskunde I

Wiskunde I

Examens ...

Examens

- ▶ In januari: Examen Wiskunde I
- ▶ Schriftelijk, open boek
- ▶ Alleen oefeningen (geen theorievragen)
- ▶ Aantekeningen in de cursus zijn toegestaan. Extra bladen mogen niet toegevoegd worden.
- ▶ Grafisch rekenmachine toegestaan (niet-symbolisch)
- ▶ Slaagpercentage in vorige jaren $\approx 50\%$

- ▶ Herkansing in augustus.
- ▶ Tussentijdse toets in november (telt niet mee).

Wiskunde I

Wiskunde I

1. Getallen

Inhoud

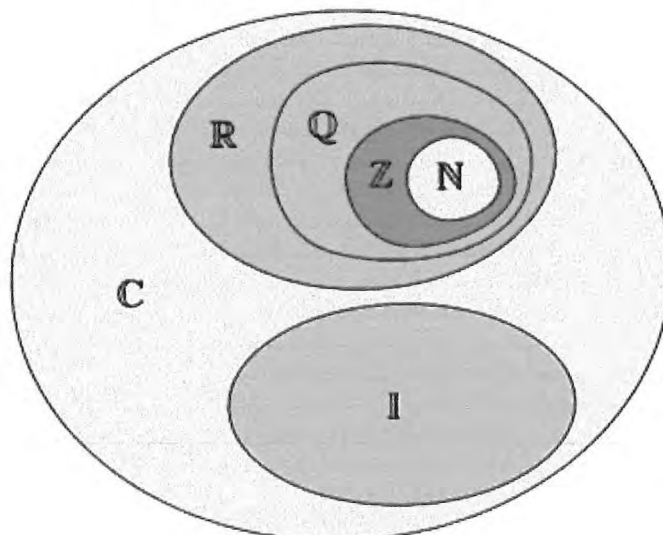
- 1.1 Functies en veranderlijken
- 1.2 Reële getallen
- 1.3 Begrippen rond ordening
- 1.4 Complexe getallen (inleiding)
- 1.5 Telproblemen

Hoofdstuk 1, Zelfstudie

Bestudeer zelf alles behalve §1.4 en §1.5.3, dus:

- 1.1 Functies en veranderlijken
- 1.2 Reële getallen
 - natuurlijke getallen $\mathbb{N}$
 - gehele getallen $\mathbb{Z}$
 - rationale getallen $\mathbb{Q}$
 - reële getallen $\mathbb{R}$
 - decimale ontwikkeling
 - bewerking op reële getallen
- 1.3 Begrippen rond ordening
 - absolute waarde
 - intervallen
 - oneindig en min-oneindig
- 1.5 Telproblemen
 - faculteiten en binomiaalcoëfficiënten
 - het binomium van Newton
 - somteken en productteken

1.4 Complexe getallen (inleiding)



Complexe getallen (inleiding)

- ▶ De vergelijking $x^2 = -1$ heeft geen oplossing in $\mathbb{R}$
- ▶ Nieuw getal i dat voldoet aan $i^2 = -1$
- ▶ Complex getal is een combinatie

$$z = x + iy \quad \text{met } x \text{ en } y \text{ reëel}$$

- ▶ $x = \operatorname{Re} z$ is het reële deel van z
- ▶ $y = \operatorname{Im} z$ is het imaginaire deel van z
- ▶ $\mathbb{C}$ is de verzameling van alle complexe getallen
 $z = x + iy$

Nulpunten van veeltermen

- ▶ $x^2 + 1$ heeft geen nulpunt in $\mathbb{R}$
- ▶ $z^2 + 1$ heeft wel nulpunten in $\mathbb{C}$, namelijk
 $z = i$ en $z = -i$
- ▶ Eigenschap: elke veelterm van graad ≥ 1 heeft een nulpunt in $\mathbb{C}$ (zie later)

Rekenen in $\mathbb{C}$

- ▶ Met complexe getallen kan je rekenen als in $\mathbb{R}$
- ▶ Enige nieuwe rekenregel: $i^2 = -1$

Complex toegevoegde en delen

- **Complex toegevoegde van $z = x + iy$ is**

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

- **Er geldt**

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \quad \text{is reëel en } \geq 0$$

- **Dit helpt bij delingen met complexe getallen: vermenigvuldig met de complex toegevoegde van de noemer**

Voorbeeld:

$$\frac{2+i}{3-i} = ?$$

1.5.4 Principe van volledige inductie

- **Zij $P(n)$ een bewering die afhangt van een natuurlijk getal n**
- **Veronderstel dat geldt voor zekere $n_0 \in \mathbb{N}$:**
 - (a) **De bewering $P(n_0)$ is waar**
 - (b) **Indien de bewering $P(k)$ waar is voor een zeker natuurlijk getal $k \geq n_0$, dan is de bewering $P(k+1)$ eveneens waar**
- **Conclusie: dan is de bewering $P(n)$ waar voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$**

Domino-effect

$$P(n_0) \Rightarrow P(n_0 + 1) \Rightarrow P(n_0 + 2) \Rightarrow \dots$$



Bron: wikipedia

Voorbeeld

- **Voorbeeld 1.5.6:**
bewijs met volledige inductie dat

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

Structuur van bewijs met volledige inductie

- **Een bewijs met volledige inductie bestaat altijd uit drie stappen:**
- (1) **Beginstap:** Toon aan dat $P(n_0)$ waar is
 - (2) **Inductiestap:** Veronderstel dat $P(k)$ waar is voor zekere $k \geq n_0$ (inductiehypothese)
Toon daarmee aan dat $P(k+1)$ waar is
 - (3) **Conclusie:** Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt de bewering $P(n)$ voor elk natuurlijk getal $n \geq n_0$, vanwege het principe van volledige inductie.

→ toledo → docu & slides...

Wiskunde I - prof. Zambon M.

- * 3 okt → les Pieter & Someraula // wo 30 okt = 18u15-20u15 in PDS.
- * lessen start om 16u15.
- * examen: schriftelijk, open boek. (alleen oefⁿ)
+ tussentijdse toets.

(LES)

Afst 1, zelfstudie

1.4 Complexe getallen

- * $i^2 = -1$
- * complex getal: $z = x + iy$ met x en $y \in \mathbb{R}$.
- * complex toegevoegde: $\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy$

↳ vb: $\frac{2+i}{3-i} = \frac{(2+i)(3+i)}{\underbrace{(3-i)(3+i)}_{=1}} = \frac{6+2i+3i+i^2}{10} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2}(1+i)$

$(3-i)(3+i) \Rightarrow (A-B)(A+B) = A^2 - B^2$
= complex toep.

1.5.4 Principe v. voll. inductie

→ bewijs v. volledige inductie (p. 16) → vb. 1.5.6.

2. function p. 21

$$\sqrt{y-1}$$

$$\sqrt{y-1}$$

af: grafiek v. $\frac{x^2}{4x^2-1}$?

$$\rightarrow \text{nulplek} \Leftrightarrow x=0$$

$$\text{VA} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ en } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{HA} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

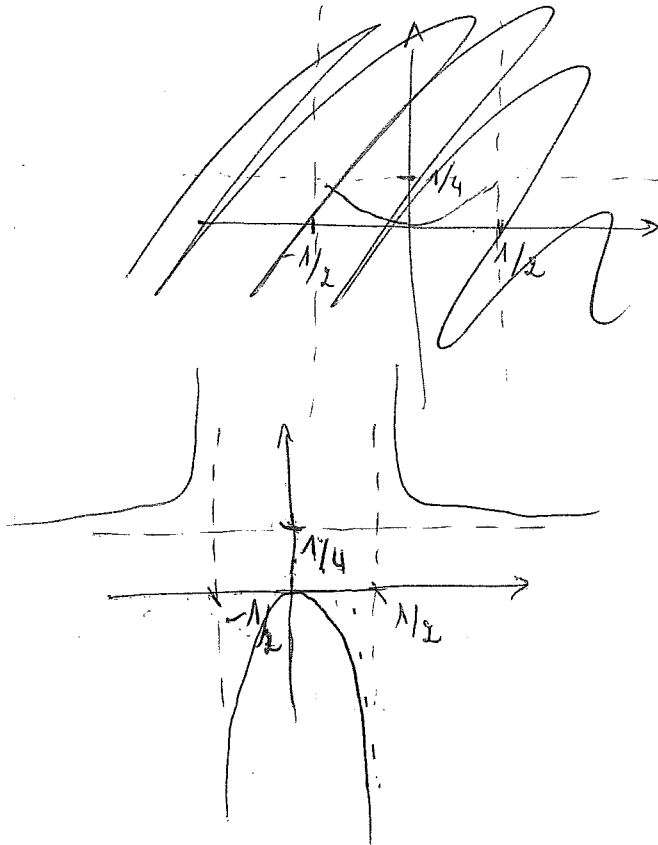
$$f'(x) = \frac{2x(4x^2-1) - x^2(8x)}{(4x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{8x^3} - 2x - \cancel{8x^3}}{(4x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-2x}{(4x^2-1)^2}$$

x	-1/2	0	1/2
f'(x)	-	0	+
	↘	↘	↗



Part. breuken:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-x^2} = \frac{2x^2-1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$



Opmerkingen in de les Hoofdstuk 2

1. [§2.3] Hoe ziet de grafiek van de rationale functie

$$\frac{x^2}{4x^2 - 1}$$

eruit?

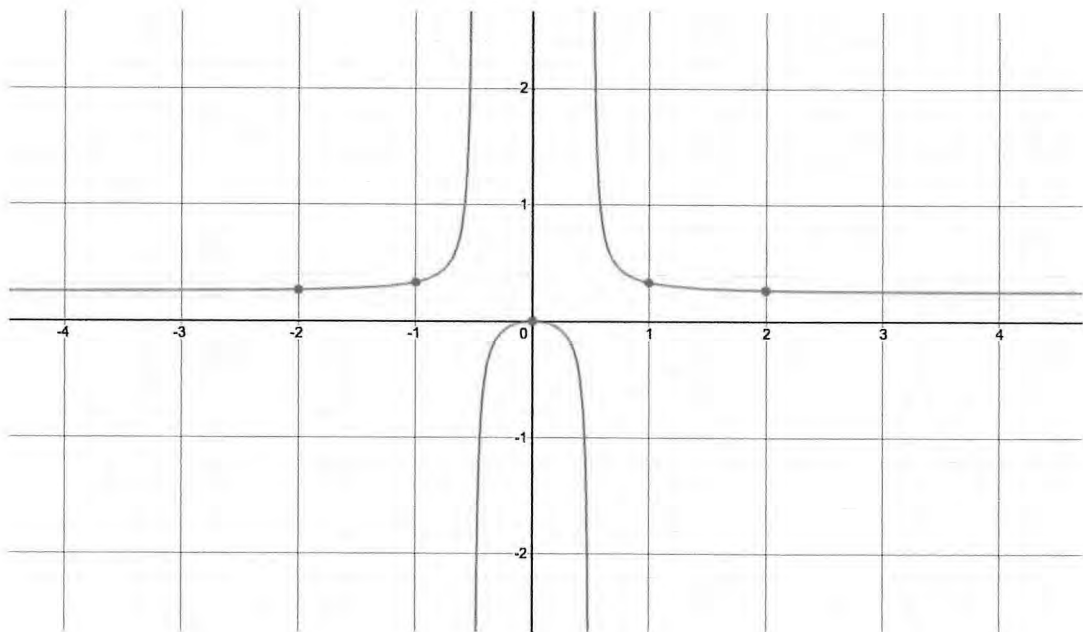
Uitleg: De graad van de teller en van de noemer zijn gelijk, en $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{4x^2 - 1} = \frac{1}{4}$. Dus hebben we een horizontale asymptoot $y = \frac{1}{4}$.

De noemer

$$4x^2 - 1 = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

heeft nulpunten $\pm \frac{1}{2}$. We hebben dus twee verticale asymptoten $x = \frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{2}$.

Voor $x > \frac{1}{2}$ en $x < -\frac{1}{2}$ is de rationale functie positief, dus daar benadert de grafiek de verticale asymptoten in de bovenste helfvlak. De rationale functie is negatief voor $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, dus daar benadert de grafiek de verticale asymptoten in de onderste helfvlak.



2. Functies

Inhoud

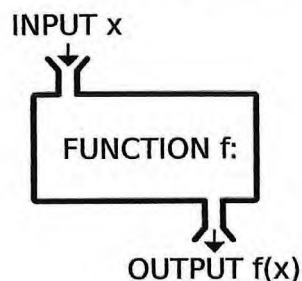
- 2.1 Definities
- 2.2 Veeltermen
- 2.3 Rationale functies
- 2.4 Inverse functies
- 2.5 Krommen in het vlak

2.1. Definities

- Een functie f geeft een verband tussen twee grootheden x en y

$$y = f(x)$$

- Bij elke x uit het domein van f hoort precies één y
 - x is de onafhankelijke veranderlijke
 - y is de afhankelijke veranderlijke



Input-output machine
Bron: wikipedia

Bewerkingen op reële functies

- Functies kunnen we
 - met een constante vermenigvuldigen

$$(cf)(x) = cf(x)$$

- onderling optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

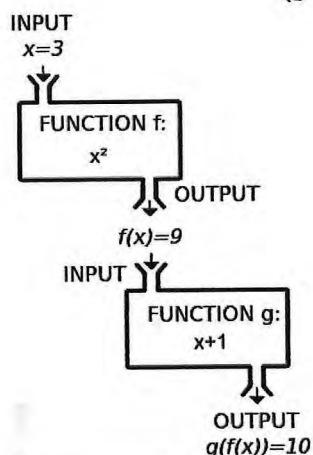
$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{als } g(x) \neq 0)$$

Samenstellen van functies

- ▶ Als f en g functies zijn dan is $g \circ f$ de functie met

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Bron: wikipedia

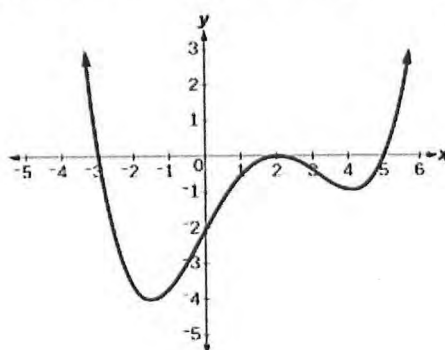
Wiskunde I 2. Functies

Grafiek van een functie

- ▶ De grafiek van een functie bestaat uit alle koppels

$$(x, y) \quad \text{met } y = f(x)$$

- ▶ Vb: de grafiek van $f(x) = (x+3)(x-2)^2(x-5)$



Wiskunde I 2. Functies

2.2 Veeltermen

- ▶ Een veelterm (polynoom) is een functie van de vorm

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

met coëfficiënten $a_0, \dots, a_n$ (meestal reële getallen)

- ▶ De veelterm heeft graad n , als $a_n \neq 0$
- ▶ Voorbeeld:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)(x-2)^2(x-5) \\ &= \dots \end{aligned}$$

is een veelterm van graad 4

Wiskunde I 2. Functies

Eerstegraads veelterm

- De grafiek van een eerstegraads veelterm

$$f(x) = ax + b$$

is een rechte

- a is de richtingscoëfficiënt
- b is het snijpunt met de y -as

Tweedegraads veelterm

- De grafiek van een tweedegraads veelterm

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

is een parabool

- De nulpunten van f zijn

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Dit leidt tot de factorisatie = ontbinden in factoren

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$D = 0 \rightarrow 1$ nulpunt
 $D > 0 \rightarrow 2$ nulpunten
 $D < 0 \rightarrow$ geen nulpunten
 $\downarrow$
 $\exists$ complexe nulpunten

Discriminant

- De discriminant is

$$D = b^2 - 4ac$$

- Als $D < 0$ dan zijn er geen reële nulpunten.
Er zijn dan wel complexe nulpunten

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm i \frac{\sqrt{-D}}{2a}$$

De nulpunten zijn elkaars complex toegevoegde

$$x_2 = \overline{x_1}.$$

Hogeregraads veelterm

- **Hoofdstelling van de algebra:**
Een veelterm van graad n

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

kan altijd gefactoriseerd worden als

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

voor zekere complexe getallen $x_1, \dots, x_n$ (nulpunten)

- De **multipliciteit** van nulpunt x^* is het aantal keren dat x^* voorkomt onder $x_1, \dots, x_n$

Vb:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^2 &= x^2(x - 2i)(x + 2i) \\ &= x^2(x^2 + 4) \end{aligned}$$

→ nulpunten: $0, 2i, -2i$
multipliciteit: 2

2.3 Rationale functies

- Een rationale functie heeft de vorm

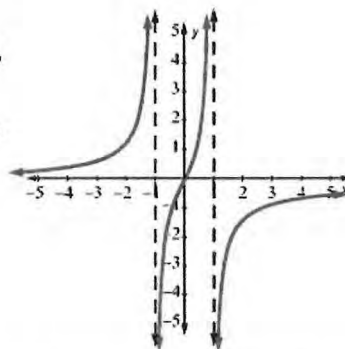
$$y = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$$

waar $a_n \neq 0, b_m \neq 0$

- Het domein bestaat uit alle x met $Q(x) \neq 0$

- Als $Q(x_0) = 0$ en $P(x_0) \neq 0$, dan heeft de grafiek een **verticale asymptoot** $x = x_0$

- Voorbeeld $y = \frac{2x}{1 - x^2}$



Limieten en horizontale asymptoot

- Als $n < m$ (echte rationale functie), dan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \quad \left(\text{bv } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x + 1}{7x^2 - 2x + 3} \right)$$

De grafiek heeft een **horizontale asymptoot** $y = 0$

- Als $n = m$, dan

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \quad \left(\text{bv } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{13x^2 + 4x + 1}{7x^2 - 2x + 3} = \frac{13}{7} \right)$$

De grafiek heeft een **horizontale asymptoot** $y = \frac{a_n}{b_m}$

Euclidische deling

- Als $n \geq m$, dan kunnen we een polynomiaal deel afsplitsen

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \Pi(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

waarin

- $\Pi(x)$ is een veelterm van graad $n - m$,
- $R(x)$ is een veelterm van graad $< m$
(dus $\frac{R(x)}{Q(x)}$ is een echte rationale functie)
- We kunnen $\Pi(x)$ en $R(x)$ berekenen met behulp van Euclidische deling van veeltermen (deling met rest)

$$P(x) = \Pi(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Schuine asymptoot

- Speciaalgeval: is $n = m + 1$, dan is de graad van het polynomiaal deel gelijk aan 1
- Voorbeeld:

$$\frac{3x^2}{x-1} = 3x + 3 + \frac{1}{x-1}$$

De grafiek van het polynomiaaldeel $y = 3x + 3$ is een schuine asymptoot

Partieelbreuken

- Een echte rationale functie (d.w.z. $n < m$) kunnen we splitsen in een som van partieelbreuken
- Vier typen partieelbreuken

(i) $\frac{1}{x - x_0}$ met $x_0 \in \mathbb{R}$

(ii) $\frac{1}{(x - x_0)^n}$ met $x_0 \in \mathbb{R}$ en $n \geq 2$

(iii) $\frac{x}{x^2 + px + q}$ en $\frac{1}{x^2 + px + q}$ met een irreducibele kwadratische factor $x^2 + px + q$, d.w.z. $D = p^2 - 4q < 0$

(iv) $\frac{x}{(x^2 + px + q)^n}$ en $\frac{1}{(x^2 + px + q)^n}$ met $n \geq 2$

Voorbeeld

$$\frac{2x^2 - 1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$$

Hoe kunnen we dat vinden?

► Factoriseer de noemer $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

► Stel:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

en breng rechterlid op één noemer.

► Vergelijk vervolgens de tellers.

► Bepaal hieruit A , B en C

2.4 Inverse functie

► Als $y = f(x)$ dan kunnen we soms x oplossen naar y :

$$x = g(y)$$

► g is dan de inverse functie van f , notatie $g = f^{-1}$

► Soms moeten we het domein van f beperken

► Vb: als $y = x^2 + 1$ en $x \geq 0$, dan

$$x = \sqrt{y-1}$$

► Vb: Als $y = x^2 + 1$ en $x \leq 0$, dan

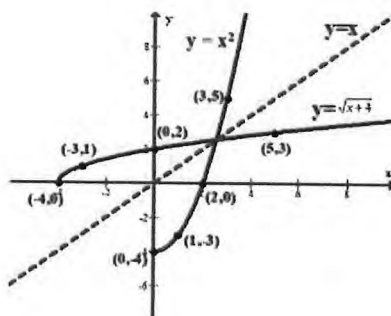
$$x = -\sqrt{y-1}$$

Vb: $y = f(x) = x^2 + 1$
 $\Rightarrow$ de inverse n. f.
bestaat niet!
 $\hookrightarrow f(2) = 5, f(-2) = 5$
 $\leadsto$ dom. beperken!
 $\downarrow$
voor f bestaat
1 y -waarde, 2
 x -waarden!

Grafiek van inverse functie

► De grafiek van de inverse functie krijgen we door de grafiek van f te spiegelen in de rechte $y = x$

► Vb: $y = x^2 - 4$ heeft als inverse $x = \sqrt{y+4}$



de eerste
bissektrise

Hoofdstuk 3: Transcendente functies

3.1. Goniometrische functies

- HF: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- grafieken kennen! (makkelijk te bepalen)
 - $\oplus \cos t = f(x) = \text{even fct} \Rightarrow \cos(-x) = \cos x$
 - $\sin t = g(x) = \text{oneven fct} \Rightarrow \sin(-x) = -\sin x$
- periodieke functies.
- goniometrische formules: (niet van buiten leren; weten dat ze bestaan)

$$\star \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] = \sin x \cos y$$

$$\star \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

we weten

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

neem $y = -z$

$$\Rightarrow \sin(x-z) = \sin x \overbrace{\cos(-z)}^{\cos z} + \cos x \overbrace{\sin(-z)}^{-\sin z}$$

berekeningen

(gezien tem. (3.8))

$\odot iy$

$\hookrightarrow$ reëel getal



$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$e^z = -1$, wat is z ?

$$\Rightarrow z = i\pi + 2\pi ik$$

met $k \in \mathbb{Z}$

$$(z = x + iy)$$

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{cases} e^x = 1 \\ \cos y + i \sin y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

lassen mal andyphor

def

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{5} \Rightarrow b = 2$$
$$c = 5$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

st. v. Pyth (RHS)

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$\Leftrightarrow b = c \cdot \cos \theta$$
$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{a}{c \cdot \cos \theta}$$
$$\tan \theta = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

3.2. Polkoordinaten

(r, θ)

3.3. Cyclometrische functies

Bgrin / Bgcos / Bgtan

3.4. Exponentiële functies

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$f(x) = e^x$$

3.5. Logarithmische functies

$$f(x) = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y \quad \text{en } x > 0$$

$\ln x$ is het natuurlijk logaritme.

def: is $\ln x > \log_{10} x$?

met $x > 1$

$\Rightarrow$ Klopt

~~log 2~~

2.5 Krommen in het vlak

- ▶ De grafiek van een functie $y = f(x)$ is een kromme in het xy -vlak
- ▶ Krommen in het vlak kunnen ook ontstaan als niveaukromme van een functie van twee veranderlijken

$$F(x, y) = c$$

- ▶ Voorbeeld: een rechte in het vlak

$$ax + by = c$$

- ▶ Bij hoogtelijnen, isothermen, ... verbindt de niveaukromme $F(x, y) = c$ punten (x, y) in het vlak met gelijke hoogte, temperatuur, ...

Kegelsneden

- ▶ Kegelsneden zijn niveaukrommen van een kwadratische functie

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

- ▶ Voorbeeld: de cirkel rond (a, b) met straal $r > 0$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Speciale gevallen

Speciale gevallen van kegelsneden:

- ▶ Een ellips in standaardvorm

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ▶ Een hyperbool in standaardvorm

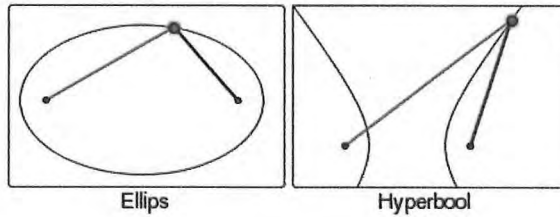
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ▶ Een parabool in standaardvorm

$$x^2 - y = 0$$

Ellips en hyperbool

Bron: SciLogs



Ellips

Hyperbool

- Een ellips bevat alle punten waarvan de som van afstanden tot twee gegeven punten constant is.

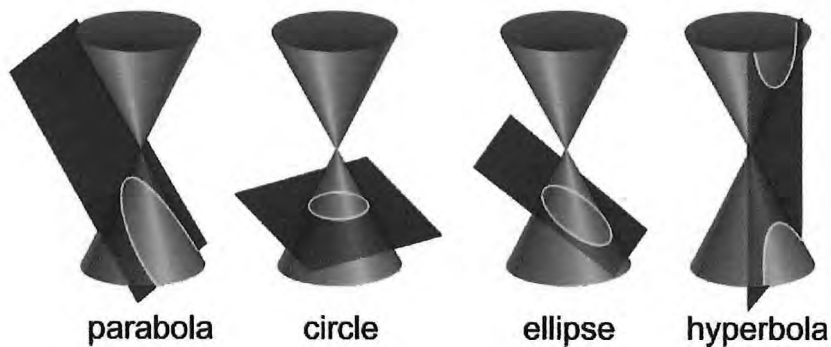
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Een hyperbool bevat alle punten waarvan het verschil constant is.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wiskunde I 2. Functies

Doorsneden van kegel met vlak



parabola

circle

ellipse

hyperbola

Bron: CK-12

Wiskunde I 2. Functies

Stelsels vergelijkingen

- Twee vergelijkingen

$$F_1(x, y) = c_1, \quad F_2(x, y) = c_2$$

hebben als gemeenschappelijke oplossingen de snijpunten van twee niveaукrommen in het vlak

Wiskunde I 2. Functies

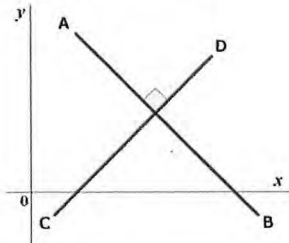
Lineaire vergelijkingen

Lineaire vergelijkingen

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

- Elke vergelijking bepaalt een rechte.
- Snijpunt van twee rechten.

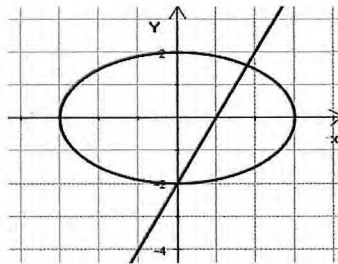


Niet-lineaire vergelijkingen

- Er is geen algemene methode voor het oplossen van een stelsel niet-lineaire vergelijkingen
- Voorbeeld:

$$2x - y = 2$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$



Snijpunten van rechte met ellips

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 3

1. [§3.1] Als $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ en $\cos \theta = \frac{2}{5}$, wat is $\tan \theta$?

Uitleg: We berekenen eerst $\sin \theta$: we weten dat $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{21}{25}$.

Verder is $\sin \theta > 0$ omdat $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, dus $\sin \theta = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

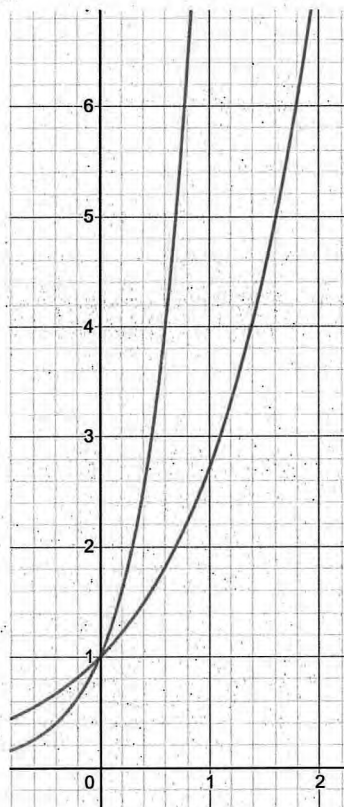
Bijgevolg is

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

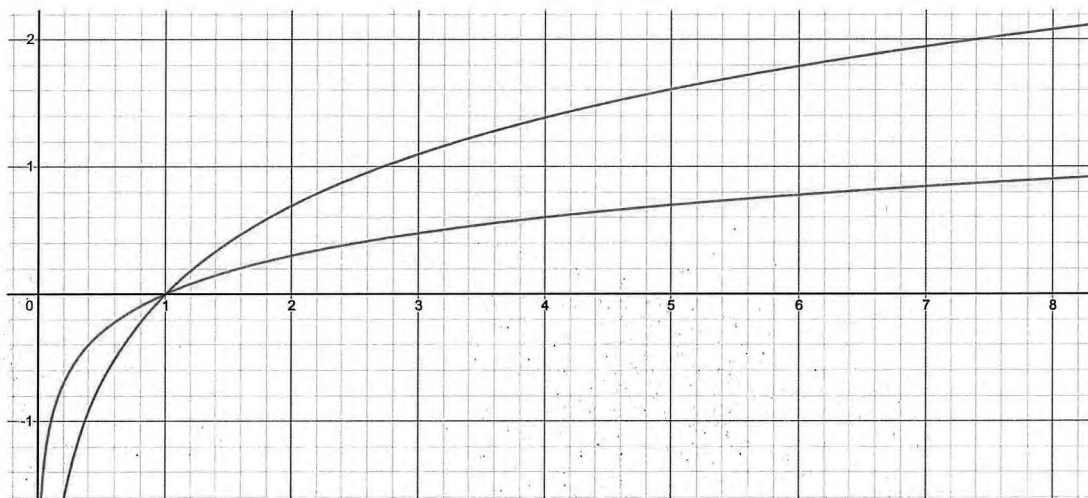
2. [§3.5] Is $\ln x > \log_{10} x$ of omgekeerd, voor $x > 1$?

Uitleg: Er geldt $\ln x > \log_{10} x$, voor $x > 1$.

Om dit te zien, kijken we ons eerst de exponentiële functies e^x en 10^x aan: omdat $10 > e = 2.7\dots$ is zeker $10^x > e^x$ als $x > 0$.
(In de figuur is de grafiek van 10^x rood.)



De grafieken van $\ln x$ en $\log_{10} x$ krijgen we door spiegeling ten opzichte van de rechte $x = y$. Hieruit zien we dat $\ln x > \log_{10} x$, voor $x > 1$.
(Beneden is de grafiek van $\log_{10} x$ rood.)



3. [§3.8] Als $e^z = -1$, wat is z ?

Uitleg: De antwoord is: er zijn oneindig veel oplossingen $z = \dots, -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, \dots$. We zien nu waarom.

Voor $z = x + iy$ is per definitie

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

en de modulus is $|e^z| = e^x$. De modulus van -1 gelijk aan 1. Dus $e^z = -1$ impliceert $e^x = 1$, d.w.z. $x = 0$. Nu

$$\cos y + i \sin y = -1 \Leftrightarrow (\cos y = -1 \text{ en } \sin y = 0) \Leftrightarrow y = \pi + 2\pi k \text{ voor } k \in \mathbb{Z}.$$

Dus $e^z = -1$ impliceert $x = 0$ en $y = \pi + 2\pi k$, d.w.z. $z = i(\pi + 2\pi k)$, waar $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Omgekeerd is } e^{i(\pi+2\pi k)} = \cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k) = -1.$$

Opmerking: Een andere (snellere) manier is door de modulus en het argument van e^z en -1 te vergelijken, zie Voorbeeld 3.8.3 in de cursustekst.

3. Transcendente Functies

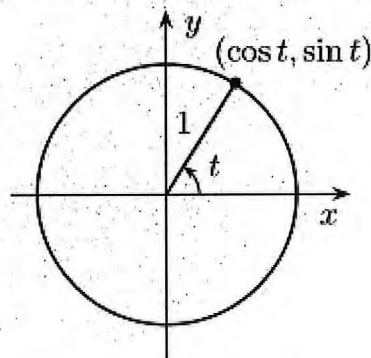
Inhoud

- 3.1 Goniometrische functies
- 3.2 Poolcoördinaten
- 3.3 Cyclometrische functies
- 3.4 Exponentiële functies
- 3.5 Logaritmische functies
- 3.6 Hyperbolische functies
- 3.7 Complexe getallen (vervolg)
- 3.8 Exponentiële functie in het complexe vlak
- 3.9 Veeltermen in het complexe vlak

43

3.1 Goniometrische functies

- **Goniometrische cirkel: straal 1 en middelpunt $(0, 0)$.**



- **Definitie van cosinus en sinus:**

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

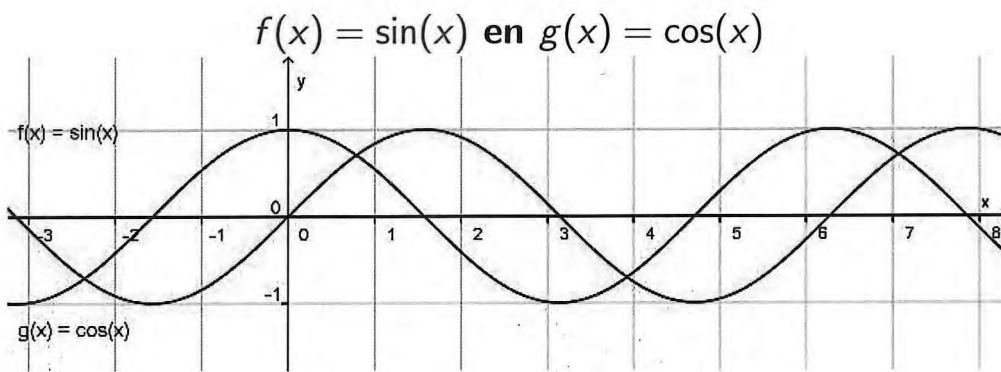
waar t in radialen ($360^\circ = 2\pi$ radialen)

- **Omdat $(\cos t, \sin t)$ op de eenheidscirkel ligt,**

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

44

Grafieken

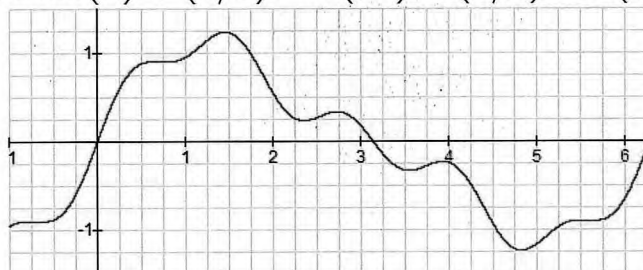


- Nulpunten van sinus in $\dots -\pi, 0, \pi, \dots$
Nulpunten van cosinus in $\dots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots$
- cosinus is een even functie: $\cos(-x) = \cos x$
sinus is een oneven functie: $\sin(-x) = -\sin x$

45

Periodieke functies

- De cosinus en sinus zijn periodieke functies met periode 2π . De golflengte is 2π , de frequentie $\frac{1}{2\pi}$.
- Ze kunnen als bouwstenen gebruikt worden voor meer ingewikkelde periodische functies. Zie Wiskunde 2.
- Voorbeeld: $\sin(x) + (1/3) \cdot \sin(2x) + (1/5) \cdot \sin(5x)$



46

Goniometrische formules

► Er geldt

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

► Dus

$$\frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)] = \sin x \cos y$$

door de twee vergelijkingen op te sommen

► en

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

door $x = y$ te nemen.

► Andere goniometrische formules: lees zelf door

47

Verdere goniometrische functies

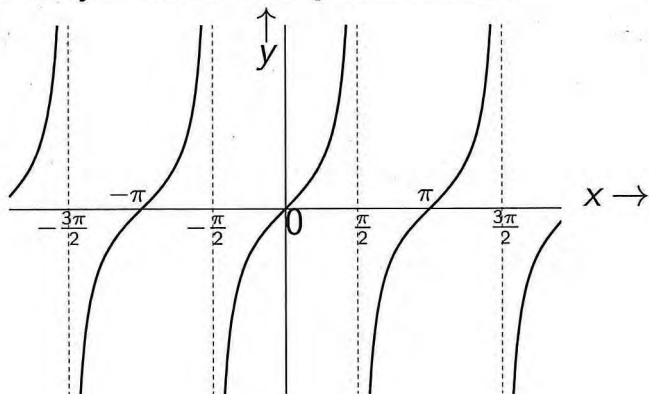
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

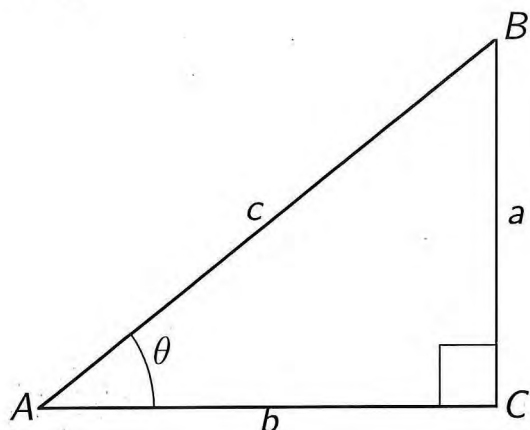
$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

► Grafiek van $y = \tan x$, de periode is π



48

Driehoeksmeting



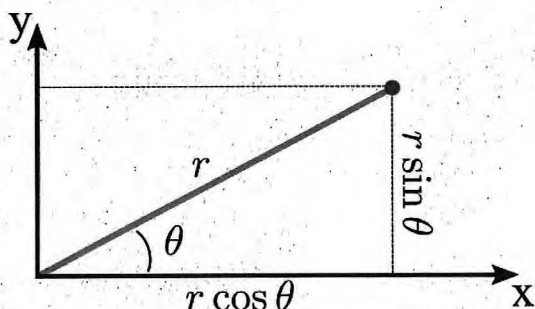
► In een rechthoekige driehoek geldt

$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \quad \cos \theta = \frac{b}{c}, \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

Q: Als $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ en $\cos \theta = \frac{2}{5}$, what is $\tan \theta$?

49

3.2 Poolcoördinaten



Bron: Math Insight

► Een punt (x, y) in het vlak kan ook met poolcoördinaten (r, θ) beschreven worden, waar
 r = afstand tot oorsprong,
 θ = hoek met de positieve x-as

► Dus

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

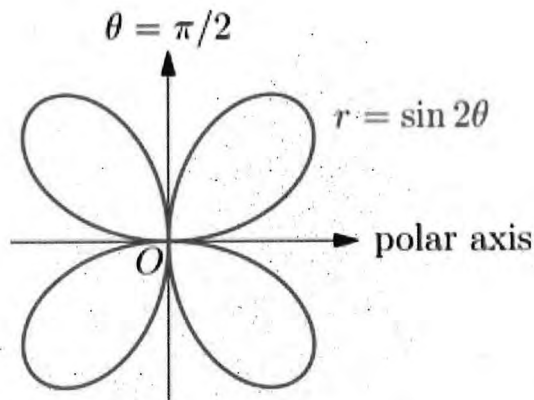
► Omgekeerd

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Kromme in poolcoördinaten

- Een verband tussen r en θ levert een kromme in poolcoördinaten
- Typische vorm: $r = f(\theta)$ met $\alpha \leq \theta \leq \beta$

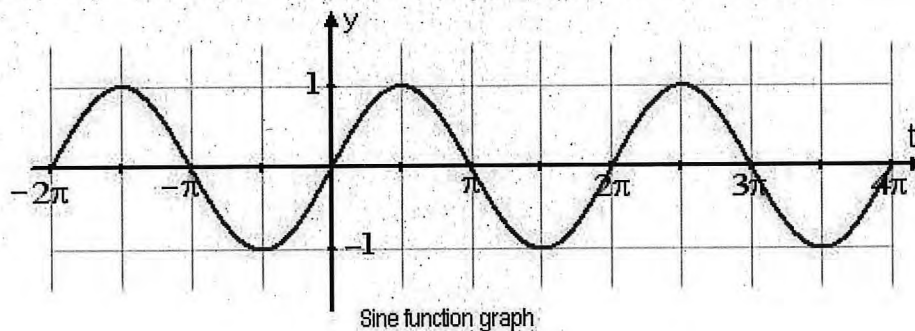
Voorbeeld: $r = \sin(2\theta)$



51

3.3 Cyclometrische functies

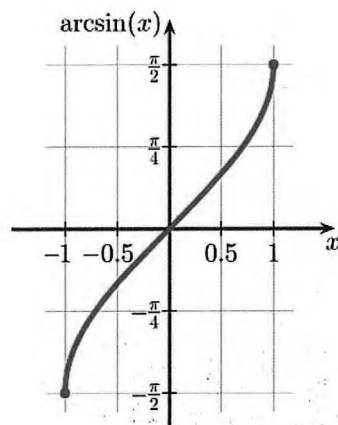
- Stel $y = \sin x$. Kunnen we x terugvinden uit y ?



- Neen. Voor vaste $y \in [-1, 1]$, zijn er meerdere x met $y = \sin x$.
- Maar: wel, als we x beperken tot een interval waar sinus stijgend of dalend is
- Beperk x tot $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

52

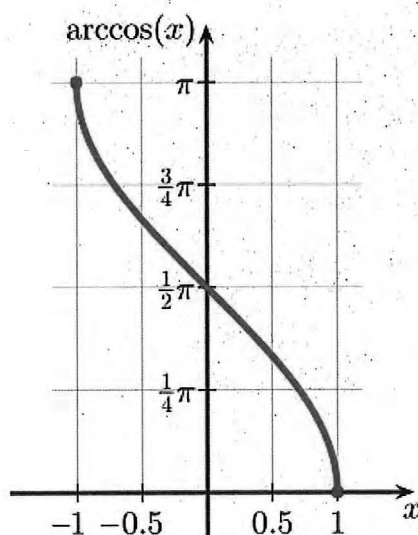
Boogsinus



- **bgsin** is de inverse van de functie $(\sin \text{ beperkt tot } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$
- Er geldt $y = \text{bgsin } x$ als en slechts als $x = \sin y$ en $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

53

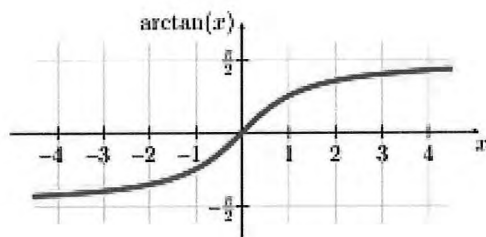
Boogcosinus



- Er geldt $y = \text{bgcos } x$ als en slechts als $x = \cos y$ en $y \in [0, \pi]$

54

Boogtangens



► Er geldt $y = \text{bgtan } x$ als en slechts als

$$x = \tan y \quad \text{en} \quad y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

► Limieten

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{bgtan } x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{bgtan } x = -\frac{\pi}{2}$$

55

3.4 Exponentiële functies

► Voor elk grondtal $a > 0$:

a^x is de exponentiële functie met grondtal a

► Meest gebruikelijk (en meest nuttig)

$$a = e = 2,71828 \dots \quad e^x = \exp(x)$$

► Definitie als som van een reeks

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \end{aligned}$$

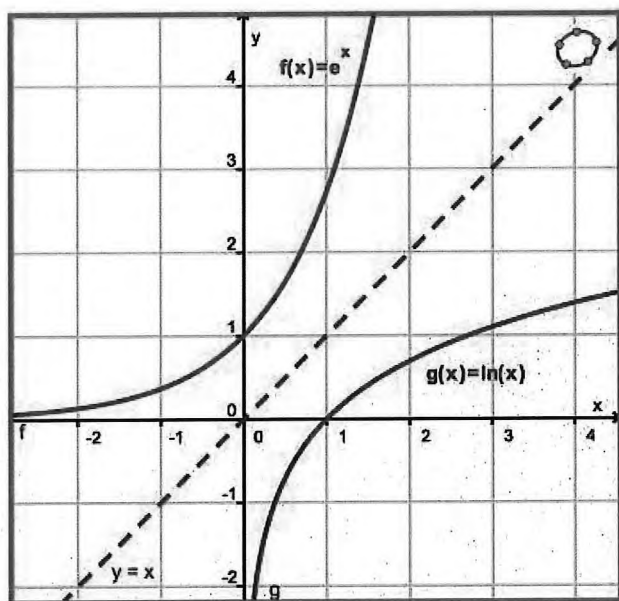
► Definitie als limiet

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

56

Grafiek

$$f(x) = e^x$$



57

Eigenschappen

- ▶ $a^x > 0$
- ▶ $a^0 = 1$
- ▶ $a^x a^y = a^{x+y}$ en $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- ▶ $(a^x)^y = a^{xy}$
- ▶ **Als $a > 1$ dan is a^x een strikt stijgende functie met**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

Als $0 < a < 1$ dan is a^x een strikt dalende functie met

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

58

Exponentiële groei

Zij N_t het aantal bacteriën in een bacteriecultuur (met overvloedige voedingsstoffen) op uur t .

Stel dat elke bacterie zich deelt na een uur.

Als we 1 bacterie hebben op $t = 0$:

- ▶ Na 1 uur: 2 bacteriën
- ▶ Na 2 uur: 4 bacteriën
- ▶ Na 3 uur: 8 bacteriën
- ▶ Na x uur: 2^x bacteriën

59

3.5 Logaritmische functies

- ▶ De logaritmische functie met grondtal $a > 0$ is de inverse van de exponentiële functie a^x

$$y = \log_a x \quad \text{als en slechts als} \quad x = a^y$$

- ▶ $\log_a x$ is gedefinieerd enkel voor $x > 0$
- ▶ Hoofdeigenschappen

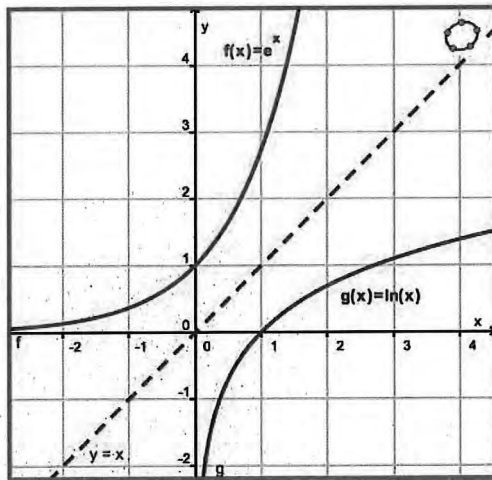
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x^s) = s \log_a x \quad \text{voor elke } s \in \mathbb{R}$$

60

Natuurlijke logaritme

- De natuurlijke logaritme $\ln x$ is de logaritme met grondtal e



Q: Is $\ln x > \log_{10} x$ of omgekeerd, voor $x > 1$?

61

Exponentiële en logaritmische groei

- De logaritmische functie $y = \ln x$ stijgt heel traag als $x \rightarrow +\infty$

- Voor elke $p > 0$ geldt

$$\frac{\ln x}{x^p} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty$$

- De exponentiële functie $y = e^x$ stijgt heel snel als $x \rightarrow +\infty$

- Voor elke $p > 0$ geldt

$$\frac{e^x}{x^p} \rightarrow +\infty \quad \text{als } x \rightarrow +\infty$$

- De exponentiële functie $y = e^{-x}$ neemt heel snel af als $x \rightarrow +\infty$

- Voor elke $p > 0$ geldt

$$x^p e^{-x} \rightarrow 0 \quad \text{als } x \rightarrow +\infty$$

62

3.6 Hyperbolische functies

► Definities

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

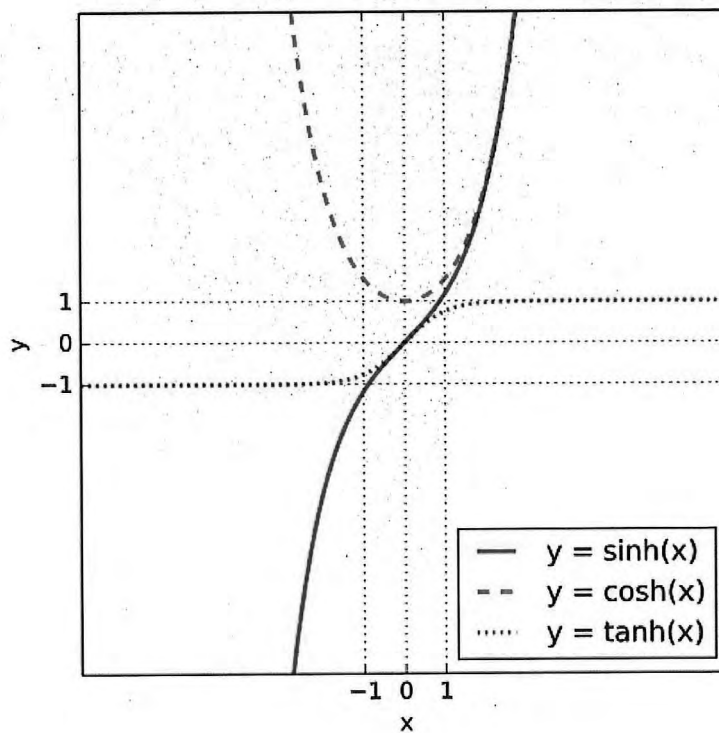
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

► Hoofdeigenschap

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

63

Grafieken

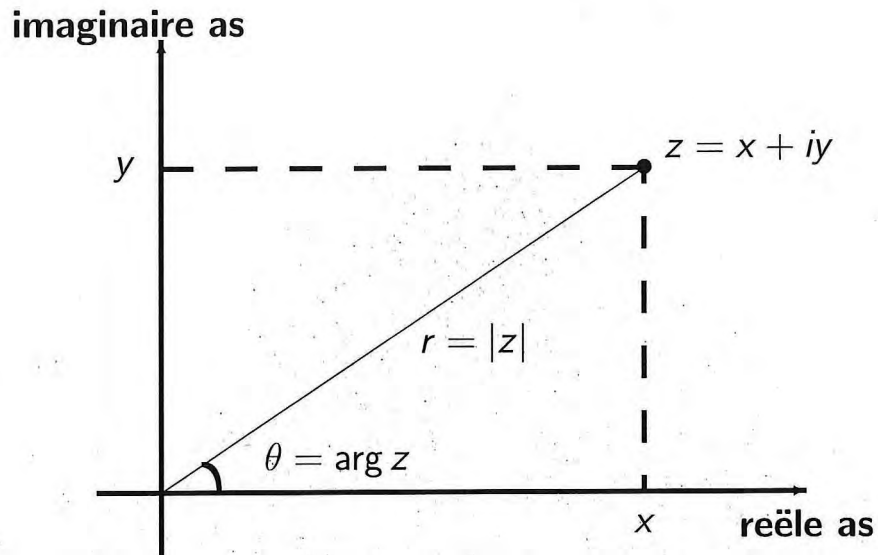


64

3.7 Complexe getallen (vervolg)

- We identificeren de complexe getallen met het 2-dimensionale vlak

$$z = x + iy \quad \leftrightarrow \quad (x, y)$$



65

Modulus en argument (poolcoördinaten)

- In poolcoördinaten geldt er

$$\operatorname{Re} z = x = r \cos \theta, \quad \operatorname{Im} z = y = r \sin \theta$$

Dus

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

- De modulus van z (of absolute waarde) is

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}}$$

- Het argument is de hoek met de positieve reële as

$$\arg z = \theta$$

(Het is bepaald op een veelvoud van 2π na)

66

3.8 Exponentiële functie in complexe vlak

- Wat is e^z als z een complex getal is ?

We willen

- Als z reëel is, dan is e^z de bekende e -macht.
- De rekenregel

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

geldt ook voor complexe z_1 en z_2 .

67

Definitie van e^{iy} en e^z

- We definiëren

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

en voor $z = x + iy$

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) \end{aligned}$$

- Dus

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$$

- In poolcoördinaten

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y \quad (+2k\pi).$$

Q: Als $e^z = -1$, what is z ?

68

Berekeningen in poolcoördinaten

- **Compacte voorstelling van complexe getallen in poolcoördinaten**

$$\begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

- **Dit is handig bij berekeningen met complexe getallen.**

69

Vermenigvuldigen en delen

- **Schrijf z_1 en z_2 in poolcoördinaten**

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{en} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

- **Dan**

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \\ &= (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \\ &= (r_1 r_2) (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

- **Op soortgelijke manier volgt**

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

70

Gehele machten

- Als $z = re^{i\theta}$ en n is geheel, dan

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \\ &= r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

- Voor $r = 1$ volgt hieruit de formule van de Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

71

Vierkantswortels

- Voor gegeven z zoeken we w met

$$w^2 = z$$

- Schrijf z en w in poolcoördinaten

$$w = re^{i\theta} \quad z = r_0 e^{i\theta_0}$$

- Uit $w^2 = z$ volgt dan

$$r^2 e^{2i\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

- Dus

$$r^2 = r_0 \quad 2\theta = \theta_0 + 2k\pi$$

- Er zijn twee oplossingen met poolcoördinaten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_0} & \text{en} & \quad \theta = \frac{1}{2}\theta_0 \\ r &= \sqrt{r_0} & \text{en} & \quad \theta = \frac{1}{2}\theta_0 + \pi \end{aligned}$$

72

3.9 Veeltermen in het complexe vlak

- Veeltermen kunnen we op natuurlijke wijze uitbreiden naar complexe waarden

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0.$$

- a_j mag complex zijn
- Als $a_n \neq 0$, dan is p een veelterm van graad n ,

73

Hoofdstelling van de algebra

- Elke n de graads veelterm

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0$$

heeft n nulpunten $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ en er geldt

$$p(z) = a_n (z - z_1) (z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

74

Tweedegraadsveelterm

► Een kwadratische veelterm

$$p(z) = az^2 + bz + c, \quad a \neq 0$$

heeft twee nulpunten

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

► Om ze te berekenen:

- Bereken $D = b^2 - 4ac$
- $w^2 = D$ heeft twee oplossingen w_1 en $w_2 = -w_1$
- Nulpunten van $p(z)$ zijn

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} \quad \text{en} \quad z_2 = \frac{-b - w_1}{2a}$$

10/10/2019

Wiskunde: hoorcollege

We definiëren, voor $y \in \mathbb{R}$

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

voorbeeld:

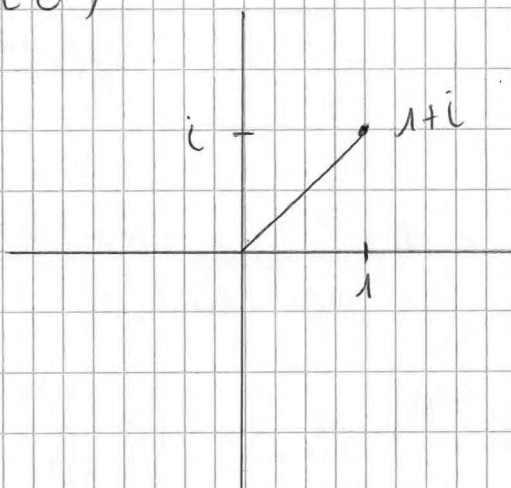
$$e^{i\pi} = \underbrace{\cos(\pi)}_{\parallel -1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{\parallel 0}$$

Berekeningen in poolcoörd.

$$\begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= r \cdot e^{i\theta} \end{aligned}$$

$$z = 1 + i$$

$$\parallel \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$



$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Bewijs : BS $\forall n=1$: $\frac{d}{dx} x = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(x+h)-x}{h}}_{=1} = 1$

IS : $n-1 \rightarrow n$

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} (x \cdot x^{n-1}) = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot \frac{d}{dx} x^{n-1}$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

? $(n-1) x^{n-2}$
 ↳ dit moet je juist bewijzen

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx} (x \cdot x^{n-1})$$

$$\frac{d}{dx} x^n = 1 \cdot x^{n-1} + x \frac{d}{dx} x^{n-1}$$

~~$$\frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} x^{n-1} + x^{n-1}$$~~

$$\frac{d}{dx} x^n - x \frac{d}{dx} x^{n-1} = x^{n-1}$$

~~$$\frac{d}{dx} x^n = x \frac{d}{dx} x^{n-1} + x^{n-1}$$~~

4.6 Q: $\frac{d}{dx} (x^3 + x^2 - 1)^8 = 8 (x^3 + x^2 - 1)^7 (3x^2 + 2x)$

4.7

$$\ln(a^x) = x \ln a$$

$$\Rightarrow a^x = e^{x \ln(a)}$$

~~$(a^x)' = \frac{1}{a^x} \cdot a^x = 1$~~

~~$(\ln x)' = \frac{1}{x}$~~

~~$(a^x)' = a^x \ln a$~~

~~$(x \ln a)' = \ln a + x \cdot \frac{1}{a}$~~

~~$(a^x)' = a^x \ln a$~~

Exp. fte in compl. vlak

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

4.8. Differentiaal

dx en dy zijn diff.

$$\rightarrow dy = f'(x) dx$$

4.9

Regel v. Leibniz

$$f(x, y) = x y^3$$

4.10 Partiele afgeleiden $\rightarrow$ vb op ppt (4.10)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (\text{p.a. w. } x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \quad (\text{p.a. w. } y)$$

vb: $f(x, y) = \cos(xy) \cdot y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos((x+h)y) \cdot y^2 - \cos(xy) \cdot y^2}{h} = -\sin(xy) \cdot y \cdot y^2 \cdot (x)'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin(xy) \cdot 2y$$

Opmerkingen in de les

Hoofdstuk 4

1. [§4.5] Toon met de volledige inductie dat voor elk $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$ geldt

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad (1)$$

Uitleg:

Beginstap ($n = 1$): we moeten tonen dat $\frac{d}{dx}x = 1$. We doen dat met de definitie van afgeleide:

$$\frac{d}{dx}x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Inductiestap: voor elke $n \geq 2$, we nemen aan dat de vergelijking (1) waar is voor $n-1$ (dus, we nemen aan dat $\frac{d}{dx}x^{n-1} = (n-1)x^{n-2}$), en tonen ze ermee voor n . We schrijven x^n als $x \cdot x^{n-1}$, en gebruiken de productregel:

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1}) = \underbrace{\frac{d}{dx}x}_{=1} \cdot x^{n-1} + x \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}x^{n-1}}_{(n-1)x^{n-2}} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

2. [§4.6] Bereken

$$\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 - 1)^8$$

Uitleg: We schrijven de functie $(x^3 + x^2 - 1)^8$ als de samenstelling $y(u(x))$,

waar $y(u) = u^8$ en $u(x) = x^3 + x^2 - 1$. Omwille van de kettingregel hebben we

$$[(x^3 + x^2 - 1)^8]' = y'(u(x)) \cdot u'(x) = 8(x^3 + x^2 - 1)^7 \cdot (3x^2 + 2x).$$

3. [§4.10] Voor

$$f(x, y) = \cos(xy) \cdot y^2,$$

bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Uitleg:

i) Om $\frac{\partial f}{\partial x}$ te berekenen, laten we de veranderlijke y vast (d.w.z., we beschouwen f als een functie van x alleen, en beschouwen y als een constante) en nemen we de afgeleide ten opzichte van x : met de productregel zien we

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx} \cos(xy) \cdot y^2 + \cos(xy) \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} y^2}_{=0} = \frac{d}{dx} \cos(xy) \cdot y^2.$$

We gebruiken nu de kettingregel (herinner je eraan dat y vast is): $\cos(xy) = v(u(x))$ waar $v(u) = \cos(u)$ en $u(x) = xy$, dus

$$\frac{d}{dx} \cos(xy) = -\sin(xy) \cdot y.$$

Dus $\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y \cdot y^2 = -\sin(xy) \cdot y^3$.

ii) De berekening van $\frac{\partial f}{\partial y}$ is analoog:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{\frac{d}{dy} \cos(xy)}_{-\sin(xy) \cdot x} \cdot y^2 + \cos(xy) \cdot \underbrace{\frac{d}{dy} y^2}_{=2y} = -\sin(xy) \cdot x \cdot y^2 + 2 \cos(xy) \cdot y.$$

4. Afgeleiden

Inhoud

- 4.1 Inleidende begrippen
- 4.2 Definities
- 4.3 Limieten
- 4.4 Afleiden vanuit de definitie
- 4.5 Rekenregels
- 4.6 Kettingregel
- 4.7 Afgeleiden van transcendente functies
- 4.8 Differentialen
- 4.9 Hogere orde afgeleiden
- 4.10 Partiële afgeleiden

76

4.1 Inleidende begrippen

Zelf doorlezen

77

4.2 Definities

- Stel $y = f(x)$
- Als x verandert van x_0 naar $x_1 = x_0 + h$ dan is

$$\Delta x = x_1 - x_0 = h$$

- Dan verandert y van $y_0 = f(x_0)$ naar $y_1 = f(x_1)$ en

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

- De verhouding

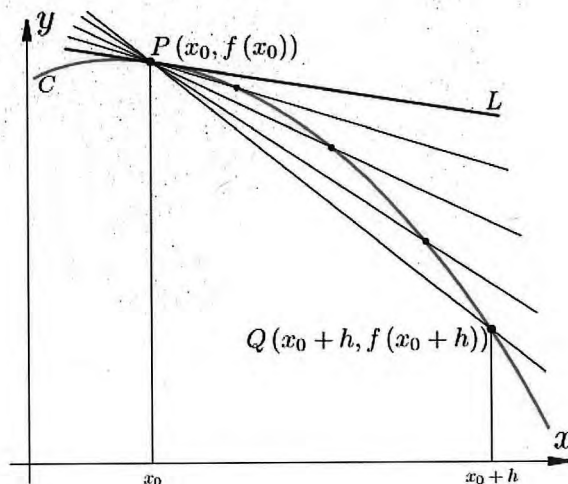
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

is het differentiequotiënt

78

Richtingscoëfficiënt

- Meetkundig is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de richtingscoëfficiënt van de rechte door twee punten van de grafiek van f :



79

Raaklijn

- **Vergelijking van de rechte door P en Q :**

$$\begin{aligned}y - y_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\&= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)\end{aligned}$$

- **Als $h = \Delta x \rightarrow 0$ dan gaat de rechte over in de raaklijn aan de grafiek in P .**

80

Afleidbaarheid

- **Als de limiet**

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

bestaat dan is de functie $y = f(x)$ afleidbaar in x_0

- **De afgeleide is dan de waarde van deze limiet:**

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- **Meetkundig is de afgeleide de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in $(x_0, f(x_0))$:**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

81

4.3 Limieten

Zelfstudie (belangrijk!)

Merk op: een functie $f(x)$ is continu in het punt $x = a$ als

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

82

4.4 Afleiden vanuit de definitie

- **Voorbeeld 1:** als $f(x)$ constant is, dan $f'(x) = 0$
- **Voorbeeld 2:** bereken de afgeleide van

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

- **Definitie van afgeleide:**

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **We berekenen**

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{x \cdot (x+h)} = \frac{-h}{x \cdot (x+h)}$$

Dus

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x \cdot (x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

83

4.5 Rekenregels

- ▶ **Constant veelvoud:** $(cf)'(x) = cf'(x)$
- ▶ **Somregel:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- ▶ **Verschilregel:** $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- ▶ **Productregel:**

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- ▶ **Quotiëntregel:** Als $g(x) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

84

Enkele gevolgen

- ▶ **n -de machtsfunctie:**

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

voor elk $n \in \mathbb{Z}$.

- ▶ **Om dit voor $n \in \mathbb{N}$ te tonen, gebruik volledige inductie.**

- ▶ **Beginstap ($n = 1$):** toon $\frac{d}{dx}x = 1$
- ▶ **Inductiestap:** gebruik

$$x^n = x \cdot x^{n-1}$$

en de productregel.

85

4.6 Kettingregel

- **De afgeleide van een samengestelde functie:**
Als $y = y(u)$ en $u = u(x)$ afleidbare functies zijn dan is

$$(y \circ u)(x) = y(u(x))$$

ook afleidbaar, met als afgeleide

$$(y \circ u)'(x) = y'(u(x)) \cdot u'(x).$$

- **Anders gezegd:**

$$\frac{d}{dx}y(u(x)) = \frac{d}{du}y(u) \cdot \frac{d}{dx}u(x)$$

of kortom

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Q: $\frac{d}{dx}(x^3 + x^2 - 1)^8 = ?$

86

Afgeleide van de inverse functie

- **Als $x = g(y)$ inverteerbaar is, dan is $y = g^{-1}(x)$**
- **Neem aan dat g afleidbaar is in $g^{-1}(x)$ met afgeleide ongelijk aan nul.**

Dan

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)}, \quad \text{met } y = g^{-1}(x)$$

- **Anders gezegd:**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

87

4.7 Afgeleiden van transcendente functies

- Voor de exponentiële functie geldt

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- Met een willekeurig grondtal a

$$a^x = e^{x \ln a}$$

geeft de kettingregel

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln a \cdot a^x$$

88

Afgeleide van logaritme

- De logaritmische functie is de inverse van de exponentiële functie
- Als $y = \ln x$ dan $x = e^y$ en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

- Anders gezegd

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

89

Afgeleide van goniometrische functies

► Basisregels

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

► Met de quotiëntenregel

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

90

Afgeleide van cyclometrische functies

► Uit de regel voor de afgeleide van de inverse functie volgt

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

91

Exponentiële functie in complexe vlak

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

geldt ook als λ een complex getal is.

Om dit te zien:

- ▶ Als $\lambda = \mu + i\omega$ dan

$$e^{\lambda x} = e^{\mu x} (\cos \omega x + i \sin \omega x)$$

- ▶ De afgeleide is

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\lambda x} &= \mu e^{\mu x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) + e^{\mu x} (-\omega \sin \omega x + i \omega \cos \omega x) \\ &= (\mu + i\omega) e^{\mu x} (\cos \omega x + i \sin \omega x) \\ &= \lambda e^{\lambda x} \end{aligned}$$

92

4.8 Differentialen

- ▶ In de notatie $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ voor de afgeleide van $y = f(x)$, kunnen we dx en dy interpreteren als oneindig kleine veranderingen
- ▶ dx en dy zijn differentialen
- ▶ Voor 'echte' veranderingen geldt

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x$$

- ▶ Voor differentialen geldt

$$dy = f'(x) dx$$

93

4.9 Hogere orde afgeleiden

- ▶ Als $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ook weer afleidbaar is, krijgen we de tweede orde afgeleide

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

- ▶ We kunnen uiteraard verder gaan met de derde en hogere orde afgeleiden

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

94

De regel van Leibniz

- ▶ Een regel voor de hogere afgeleide van een product van twee functies
- ▶ Eerste afgeleide (productregel)

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

- ▶ Tweede afgeleide

$$(fg)''(x) = f(x)g''(x) + 2f'(x)g'(x) + f''(x)g(x)$$

- ▶ Algemene afgeleide

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

95

4.10 Partiële afgeleiden

$f(x, y)$ is een functie van twee veranderlijken.

- We kunnen y een vaste waarde geven en alleen x als veranderlijke beschouwen.
- De afgeleide

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

is de partiële afgeleide naar x .

- Net zo is

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

is de partiële afgeleide naar y .

Meer hierover in hoofdstuk 9 en verder.

18/10/2019

Wiskunde: hoo college

5. TOEPASSINGEN AFGELEIDEN

* Q: ~~in~~ lokaal min, lokaal max, buigpunt in $x=0$

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x) &= x^3 \\ f'(x) &= 3x^2 \\ f''(x) &= 6x \end{aligned}$$



x	0
$f''(x)$	- 0 + $\rightarrow$ buigp.
$f'(x)$	+ 0 + $\rightarrow$ min/max

$$\begin{aligned} \rightarrow g(x) &= -x^4 \\ g'(x) &= -4x^3 \\ g''(x) &= -12x^2 \end{aligned}$$



als $x < 0$, dan $g'(x) > 0$
 $x > 0$, $g'(x) < 0$

$$\rightarrow h(x) = \sin(x^2)$$

$$h'(x) = 2x \cos(x^2)$$

$$h''(x) = 2 \cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2)$$

x	0
$g''(x)$	- 0 - $\rightarrow$ max
$g'(x)$	+ 0 - $\rightarrow$ min

MINIMUM

$$h''(0) = 2 > 0$$



* Q: $f(x) = x^2$ op $[-2, 1]$: waar max/min?

$$f'(x) = 2x$$

x	$[-2$	0	$1]$
$f'(x)$	-	0	+

bij $x=0$ een ~~max~~ min

MIN ~~max~~ in 0: $f(0) = 0$

MAX ~~min~~ in -2: $f(-2) = 4$

$$f'(x) = 2x$$

stationaire punten in $] -2, 1 [: x = 0$

VERGELIJK: $f(0) = 0, f(-2) = 4, f(1) = 1$

5.3

steeds betere benaderingen voor x^*

5.4

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = f(x)$$

"

$$= P_2(x)$$

Q: TVT van graad 3 rond $x = 1$ voor

$$f(x) = \ln x$$

$$P_3(x) = \underbrace{f(1)}_{0} + \underbrace{f'(1)}_{1} (x-1) + \underbrace{\frac{f''(1)}{2!}}_{-1} (x-1)^2 + \underbrace{\frac{f^{(3)}(1)}{3!}}_{\frac{1}{2}} (x-1)^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'' = \frac{-1}{x^2}$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 + \frac{1}{3} (x-1)^3$$

5.5

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 5

1. [§5.2] Hebben deze functies een lokaal minimum, lokaal maximum, of buigpunt in $x = 0$?

1. $f(x) = x^3$

2. $g(x) = -x^4$

3. $h(x) = \sin(x^2)$

Uitleg:

1. $f(x) = x^3$ heeft een *buigpunt* in 0, per definitie: de afgeleide $f'(x) = 3x^2$ wisselt niet van teken rond 0.

2. $g(x) = -x^4$ heeft een *maximum* in 0.

Om dit te zien, bereken we

$$g'(x) = -4x^3.$$

Bijgevolg, $g'(x) > 0$ als $x < 0$ en $g'(x) < 0$ als $x > 0$. Dus is $g(x)$ stijgend voor $x < 0$ en dalend voor $x > 0$.

(Opmerking: de “tweede afgeleide test” leidt hier tot geen conclusie, omdat $g''(0) = 0$.)

3. $h(x) = \sin(x^2)$ heeft een *minimum* in 0. Dat kunnen we op twee verschillende manieren zien.

a) We berekenen

$$h'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

Dichtbij aan 0, is $\cos(x^2) > 0$ (omdat $\cos(0) = 1 > 0$). Dus, dichtbij aan 0, is $h'(x) < 0$ als $x < 0$ en $h'(x) > 0$ als $x > 0$. Dus is $h(x)$ dalend voor $x < 0$ en stijgend voor $x > 0$.

b) We kunnen ook de “tweede afgeleide test” gebruiken. Omwille van de productregel,

$$h''(x) = -\sin(x^2) \cdot 4x^2 + 2\cos(x^2),$$

dus $h''(0) = 2 > 0$.

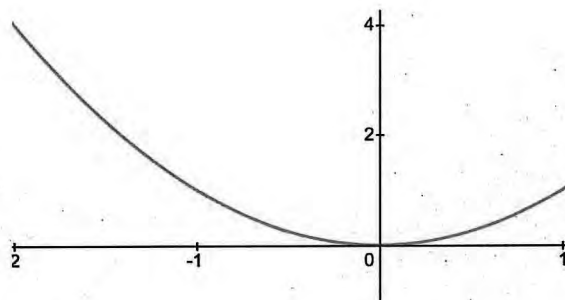
2. [§5.2] Betrach de functie $f(x) = x^2$ op het gesloten interval $[-2, 1]$. Waar heeft ze een maximum/minimum?

Uitleg: We weten dat als c een minimum of maximum van f is, die in het *open* interval $] - 2, 1[$ ligt, dan c een stationair punt is. Het enige stationaire punt van f in $] - 2, 1[$ is $x = 0$, omdat $f'(x) = 2x$.

Het kan ook zijn dat een maximum/minimum in $x = -2$ of $x = 1$ liggen. We moeten dus de volgende drie waarden vergelijken:

$$f(-2) = 4, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

De conclusie is dat $x = -2$ het (unieke) maximum is en $x = 0$ het (unieke) minimum.



3. [§5.4] Vind de Taylorveelterm van graad 2 rond $x = 0$ voor

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Uitleg: Per definitie, de Taylorveelterm van graad 2 rond $x = 0$ is

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2.$$

We berekenen $f'(x) = 2a_2x + a_1$ en $f''(x) = 2a_2$. Dus is $f(0) = a_0$, $f'(0) = a_1$ en $f''(0) = 2a_2$. Dus

$$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Met andere woorden, in dit geval, $P_2(x) = f(x)$.

4. [§5.4] Vind de Taylorveelterm van graad 3 rond $x = 1$ voor

$$f(x) = \ln x.$$

Uitleg: Per definitie, de Taylorveelterm van graad 3 rond $x = 1$ is

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(1)(x-1)^3.$$

We berekenen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''(1) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= 2\frac{1}{x^3}, & f^{(3)}(1) &= 2. \end{aligned}$$

Bovendien is $f(1) = 0$. Dus de gezochte Taylorveelterm is

$$(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3.$$

5. Toepassingen van afgeleiden

Inhoud

- 5.1 Verloop van functies
- 5.2 Maxima en minima
- 5.3 Methode van Newton-Raphson
- 5.4 Taylorveeltermen
- 5.5 Berekening van limieten

97

5.1 Verloop van functies

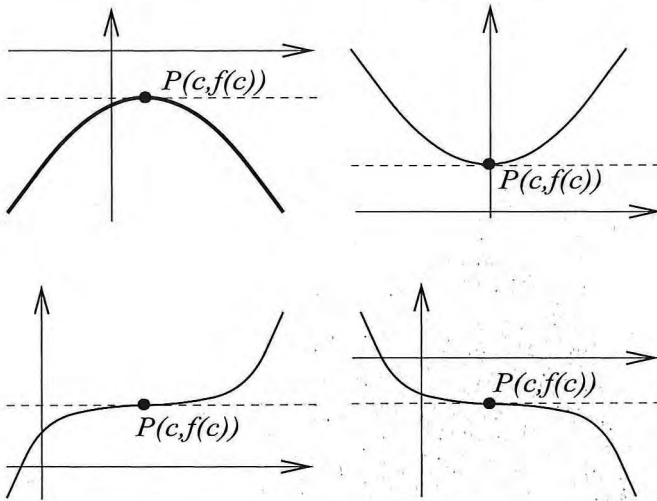
De afgeleide is een hulpmiddel om het verloop van een functie te onderzoeken.

- ▶ $f'(x) \geq 0$ voor elke $x \in [a, b]$
 $\implies f$ is stijgend op $[a, b]$
- ▶ $f'(x) > 0$ voor elke x in het open interval $]a, b[$
en f is continu op het gesloten interval $[a, b]$
 $\implies f$ is strikt stijgend op $[a, b]$
- ▶ Net zo voor dalend en strikt dalend
- ▶ $f'(x) = 0$ voor elke $x \in [a, b]$
 $\implies f$ is constant op $[a, b]$

98

5.2 Maxima en minima

- c een stationair punt van f als $f'(c) = 0$



- f heeft een minimum/maximum in $c \in]a, b[$
 $\implies c$ is een stationair punt

99

Het tekenverloop bij een stationair punt

- $f'(x) > 0$ voor x links van c ,
 $f'(x) < 0$ voor x rechts van c
 $\implies$ er is een lokaal maximum in c :

x	c		
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	stijgend	maximum	dalend

- $f'(x) < 0$ voor x links van c ,
 $f'(x) > 0$ voor x rechts van c
 $\implies$ er is een lokaal minimum in c :

x	c		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	dalend	minimum	stijgend

- Als $f'(x)$ niet van teken wisselt rond $x = c$ dan is er geen extremum, maar een buigpunt

100

De 'tweede afgeleide test'

Neem aan dat c een stationair punt is.

- ▶ $f''(c) > 0 \implies$ er is een lokaal minimum in c
- ▶ $f''(c) < 0 \implies$ er is een lokaal maximum in c
- ▶ Als $f''(c) = 0$, dan kunnen we geen conclusie trekken

Q: Hebben deze functies een lokaal minimum, lokaal maximum, of buigpunt in $x = 0$?

- ▶ $f(x) = x^3$
- ▶ $g(x) = -x^4$
- ▶ $h(x) = \sin(x^2)$

Q: Betracht de functie $f(x) = x^2$ op het gesloten interval $[-2, 1]$. Waar heeft ze een maximum/minimum?

101

5.3 Methode van Newton-Raphson

Doel: het benaderen van een nulpunt x^* van f

- ▶ Kies een startwaarde x_0 en vorm de raaklijn aan de grafiek

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- ▶ Het nulpunt hiervan is

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

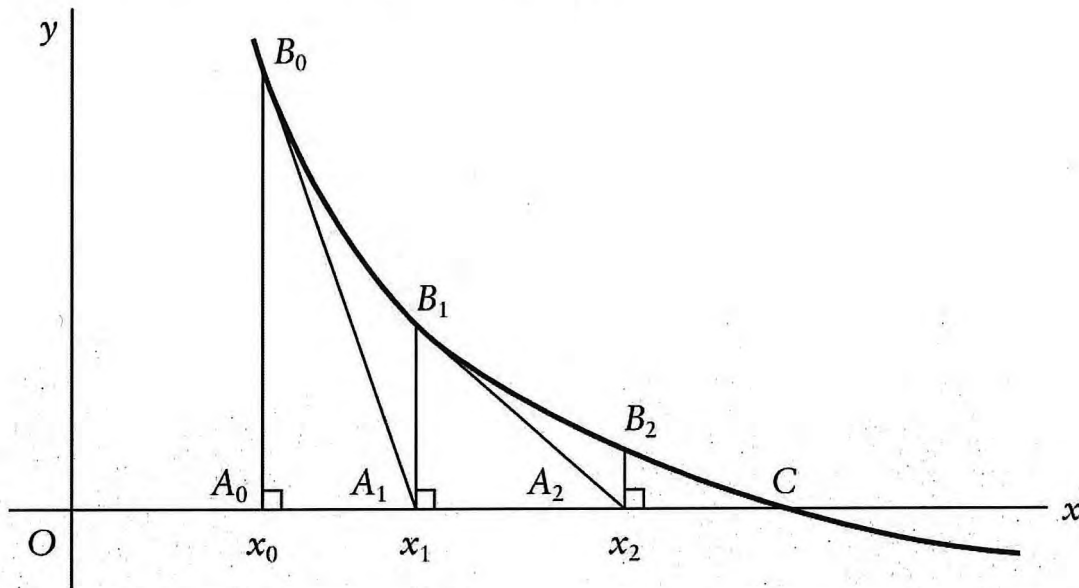
Dit is in veel gevallen een betere benadering voor x^*



Sir Isaac Newton 1643-1727

102

Illustratie bij Newton-Raphson



$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

103

- We kunnen dit nogmaals toepassen:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

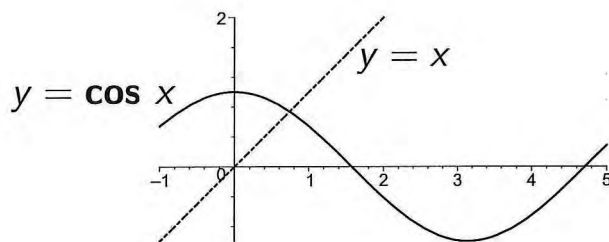
- In het algemeen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- In veel gevallen (niet altijd!) vinden we zo steeds betere benaderingen voor x^*
- De convergentie is vaak kwadratisch: het aantal correcte decimale cijfers verdubbelt (ongeveer) bij elke stap

104

Voorbeeld: $\cos x = x$



- De vergelijking $\cos x = x$ heeft een oplossing x^* tussen 0 en $\pi/2$
- We zoeken een nulpunt van $f(x) = x - \cos x$
- De Newton-Raphson iteratie luidt $x_{k+1} = F(x_k)$, met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

105

Resultaten

We hebben $f(x) = x - \cos x$ en $f'(x) = 1 + \sin x$. Dus

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x - \cos x}{1 + \sin x} = \frac{x \sin x + \cos x}{1 + \sin x}$$

k	x_k	$f(x_k)$
0	0,	-1,0
1	1,	0,46
2	0,7503638678402438	0,19 $\cdot 10^{-1}$
3	0,7391128909113616	0,46 $\cdot 10^{-4}$
4	0,7390851333852840	0,28 $\cdot 10^{-9}$
5	0,7390851332151606	-0,1 $\cdot 10^{-15}$
6	0,7390851332151607	0,1 $\cdot 10^{-15}$

106

5.4 Taylorveeltermen

- Een lineaire benadering van $f(x)$ rond $x = 0$ is

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

omdat de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f is

$$y = f(0) + f'(0)x$$

- De veelterm van graad ≤ 1

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x$$

voldoet aan

$$P_1(0) = f(0), \quad P_1'(0) = f'(0)$$

107

Kwadratische benadering

- We zoeken een veelterm P_2 van graad ≤ 2 met

$$P_2(0) = f(0), \quad P_2'(0) = f'(0), \quad P_2''(0) = f''(0)$$

- Oplossing:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$$

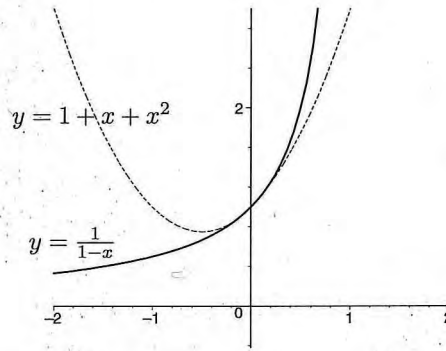
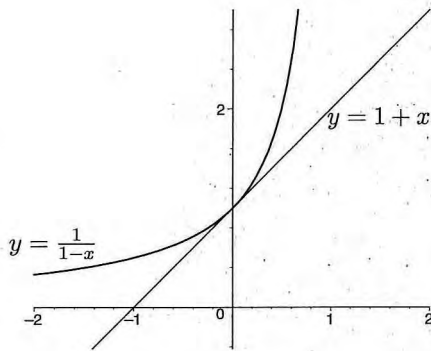
- $P_2(x)$ is een kwadratische benadering van f rond $x = 0$

108

Voorbeeld 5.4.1

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

- Bereken $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2$
- Dus: de lineaire benadering rond $x = 0$ is $1 + x$
- de kwadratische benadering rond $x = 0$ is $1 + x + x^2$



109

Hogere orde benadering

- We zoeken een veelterm P_n van graad $\leq n$ met

$$P_n(0) = f(0), \quad P'_n(0) = f'(0), \quad \dots \quad P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

- De oplossing van het probleem gelijk aan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

omdat voor elke veelterm P van graad $\leq n$ geldt

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

110

Taylorveelterm

- P_n is de Taylorveelterm van graad n van f

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$



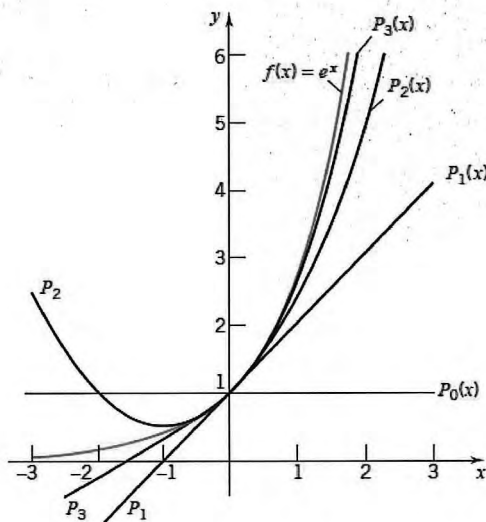
Brook Taylor 1685-1731

111

Voorbeeld 1

- Voor $f(x) = e^x$ is de Taylorveelterm van graad n

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$



Bron: Quora

112

Voorbeeld 2

► Voor $f(x) = \sin x$ vinden we

$$P_1(x) = P_2(x) = x$$

$$P_3(x) = P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_5(x) = P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Q: Taylorveelterm van graad 2 rond $x = 1$ voor

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0?$$

113

De Taylorveelterm rond een punt a

► De Taylorveelterm van f rond a is

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

► P_n is de (unieke) veelterm van graad $\leq n$ die voldoet aan

$$P_n(a) = f(a), \quad P'_n(a) = f'(a), \quad \dots, \quad P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

Q: Taylorveelterm van graad 3 rond $x = 1$ voor

$$f(x) = \ln x?$$

114

Bewerkingen met Taylorveeltermen

Lees zelf door

115

5.5 Berekening van limieten

Soms kan je limieten berekenen met Taylorveeltermen

- **Voorbeeld 5.5.1: Berekenen de limiet**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}$$

- **Zoek de eerste Taylorveelterm voor teller en noemer die niet nul wordt in $x = 0$:**

$$\sin x - x = -\frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

- **Besluit: bovenstaande limiet is gelijk aan**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + \dots}{\frac{1}{3}x^3 + \dots} = -\frac{1}{2}$$

116

Regels van de l'Hôpital

Voor de berekening van limieten

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

die aanleiding geven tot onbepaalde vormen $0/0$ of ∞/∞



Guillaume François Antoine,
Markies de l'Hôpital 1661-1704

117

Regels van de l'Hôpital (geval $0/0$)

- Neem aan dat

$$f(a) = g(a) = 0$$

- Neem aan dat de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

- Dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Voorbeeld:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

118

Regels van de l'Hôpital (geval ∞/∞)

- Neem aan dat

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

- Neem aan dat de volgende limiet bestaat:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

- Dan geldt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

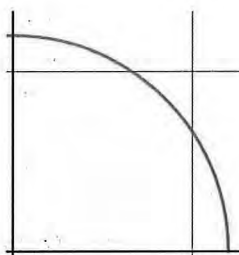
Opmerkingen in de les Hoofdstuk 6

1. [§6.3] Zij $r > 0$. Wat is

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx?$$

Gebruik ervoor de definitie van bepaalde integral.

Uitleg: De grafiek van de functie $\sqrt{r^2 - x^2}$, beperkt tot het interval $[0, r]$, ziet er zo uit:



Het gebied onder de grafiek is een kwart schijf met radius r . Zijn oppervlakte is dus $\frac{1}{4}\pi r^2$.

2. [§6.4] Bereken

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx, \quad \int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

Uitleg: We gebruiken de hoofdstelling van de integraalrekening (tweede vorm). Een primitieve functie van $\cos(x)$ is $\sin(x)$. Dus

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx &= [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1, \\ \int_0^{\pi} \cos(x) dx &= [\sin(x)]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

3. [§6.5] Is

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

convergent? Indien so, wat is het?

Uitleg: We gebruiken de definitie van oneigenlijk integraal en berekenen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} \right)}_{=0} - (-1) = 1.$$

Dus is de oneigenlijk integraal convergent en gelijk aan 1.

4. [§6.6] Bereken

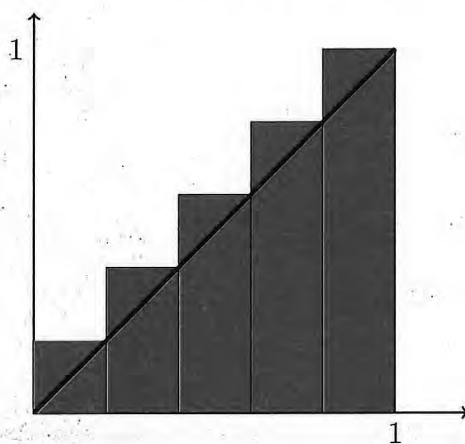
$$\int_0^1 x \, dx$$

met de *rechtereindpuntregel*.

Uitleg: We betrachten de functie $f(x) = x$. Zij n een natuurlijk getal. Volgens de rechtereindpuntregel moeten we het interval $[0, 1]$ in de n deelintervallen

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

splitsen, en op het j -de deelinterval een rechthoek nemen met hoogte gelijk aan de waarde van f op de rechtereindpunt van dat interval. De hoogte is dus $f(\frac{j}{n}) = \frac{j}{n}$.



- De oppervlak van de eerste rechthoek is $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$
- De oppervlak van de tweede rechthoek is $\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2}$
- ...
- De oppervlak van de n -de rechthoek is $\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n}{n^2}$.

De som van de oppervlakken is dus

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}.$$

(In de voorlaatste gelijkheid hebben we gebruikt dat

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

wat getoond kan worden met van het principe van de volledige inductie.)

Nu moeten we de limiet nemen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Dit toont aan, door toepassing van de rechtereindpuntregel, dat $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

6. Integralen

Inhoud

- 6.1 Begripsbepaling
- 6.2 Onbepaalde integraal
- 6.3 Bepaalde integraal
- 6.4 Hoofdstelling van de integraalrekening
- 6.5 Oneigenlijke integralen
- 6.6 Riemann-integraal

120

6.1 Begripsbepaling

Twee belangrijke aspecten:

- ▶ **Het vinden van primitieven: als**

$$\frac{dF}{dx} = f(x),$$

wat is dan $F(x)$?

- ▶ **Oppervlakteberekening:**
hoe bepalen we oppervlaktes onder een grafiek?

121

6.2 Onbepaalde integraal

- F een primitieve functie van f als

$$F'(x) = f(x)$$

- De onbepaalde integraal van f is

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

en is op een constante C na bepaald

122

Een aantal standaardintegralen

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{als } \alpha \neq -1,$$

$$\int x^{-1} dx = \ln |x| + C,$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

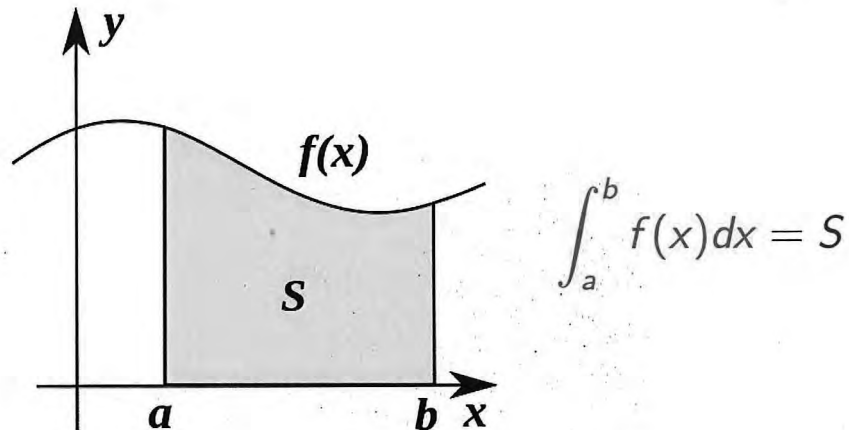
$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

123

6.3 De bepaalde integraal

- De bepaalde integraal is de oppervlakte onder de grafiek $y = f(x)$ tussen $x = a$ en $x = b$.



Hier wordt aangenomen dat $f(x) \geq 0$.

Bron: Wikipedia

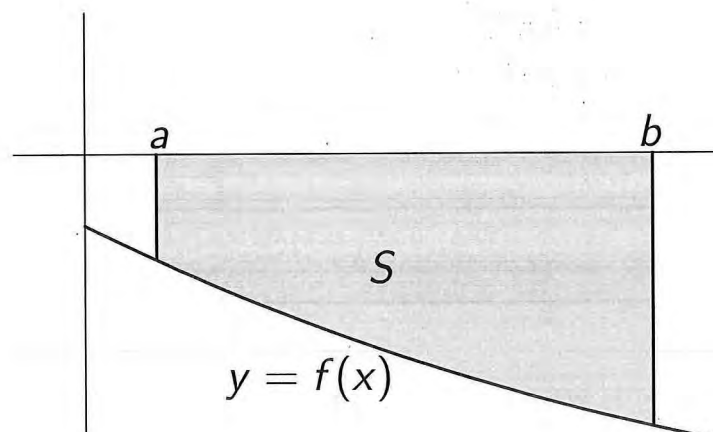
Q: Bereken $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$

124

Oppervlakte onder de x-as

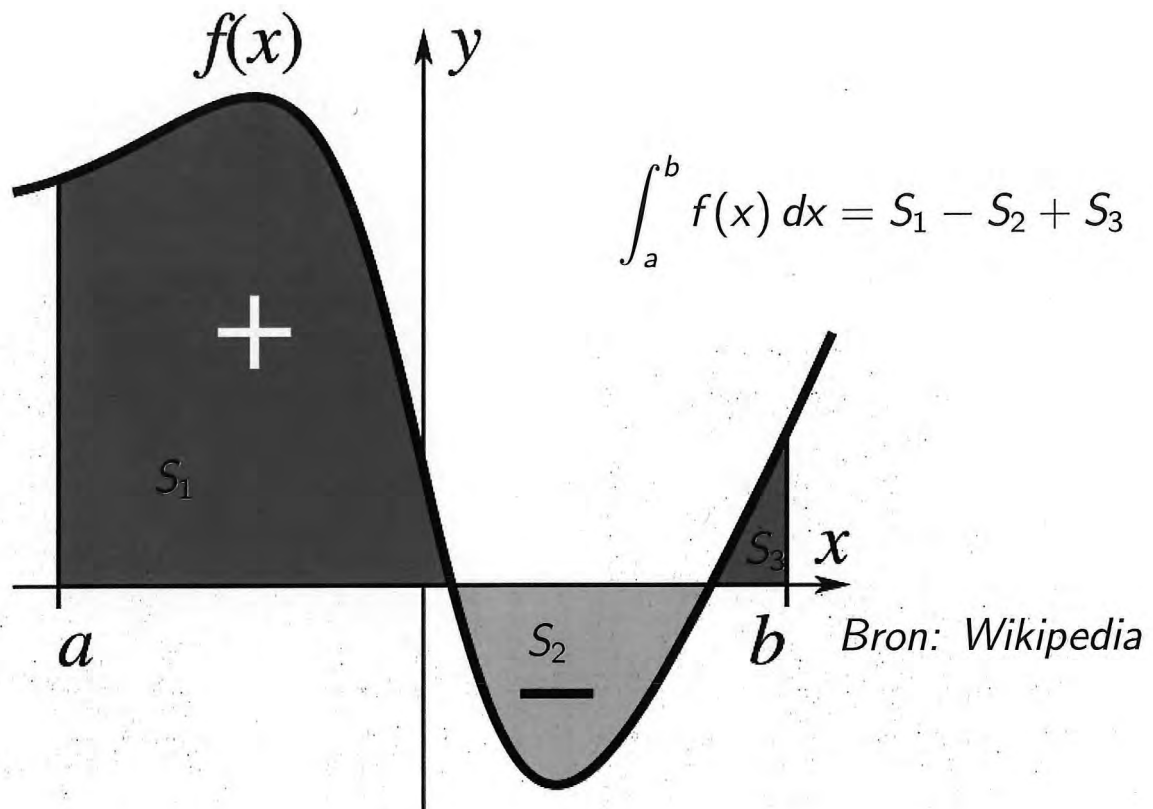
- Als $f(x) \leq 0$ voor $a \leq x \leq b$ dan is $\int_a^b f(x) dx$ negatief:

$$\int_a^b f(x) dx = -S$$



125

Algemene geval



126

Rekenregels

- **Lineariteit**
- **Splitsen van integratie-interval: als $a < c < b$,**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- **Afspraak:**

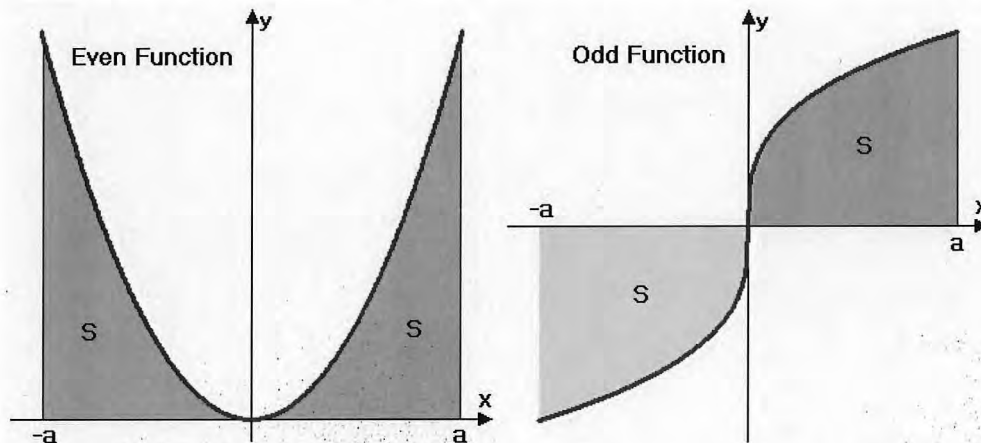
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

en

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

127

Symmetrie in integralen



- **f is even als $f(-x) = f(x)$**
- **f is oneven als $f(-x) = -f(x)$**

Bron: eMathHelp

$$f \text{ is oneven} \implies \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$f \text{ is even} \implies \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

128

6.4 Hoofdstelling van de integraalrekening

Deze stelling geeft een verhouding tussen afleiden en integreren

- Zij f is een continue functie op $[a, b]$
- Dan is

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

een primitieve functie van f op $[a, b]$.

- Dat wil zeggen

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad \text{voor } x \in [a, b]$$

129

Tweede vorm van de hoofdstelling

- Zij f continu op $[a, b]$, en F een primitieve functie van f
- Dan

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- Notatie:

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Q: Bereken

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx, \quad \int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

130

Bewijs van de tweede vorm

- Uit de eerste vorm volgt dat

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ook een primitieve functie van f is

- Dus $F'(x) = f(x) = S'(x)$
- Dan geldt voor een zekere constante C ,

$$F(x) = S(x) + C$$

- Dus

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (S(b) + C) - (S(a) + C) \\ &= S(b) - S(a) \\ &= \int_a^b f(t) dt - \underbrace{\int_a^a f(t) dt}_{=0} \end{aligned}$$

131

Veranderlijke grenzen, gemiddelde waarde

- We weten

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt = -f(x)$$

- Met kettingregel geldt bvb

$$\frac{d}{dx} \int_a^{x^2} f(t) dt = f(x^2) \cdot 2x$$

- Een andere interpretatie van de bepaalde integraal:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \text{gemiddelde waarde van } f \text{ over } [a, b]$$

132

6.5 Oneigenlijke integralen

Een integraal $\int_a^b f(x) dx$ is oneigenlijk als

- (a) ofwel het integratie-interval $[a, b]$ onbegrensd is,
- (b) ofwel de functie $f(x)$ op $[a, b]$ onbegrensd is.

Voorbeelden:

(a)

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t} dt, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy$$

(b)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^a \frac{dx}{a-x},$$

(a) Onbegrensde intervallen

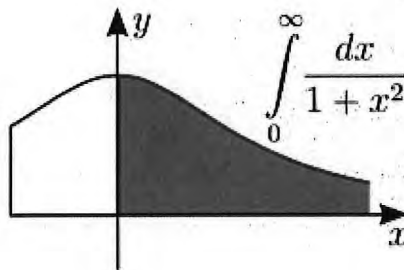
- We stellen per definitie

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

- Als de limiet bestaat dan is de oneigenlijke integraal **convergent**, anders **divergent**

Voorbeeld: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ is convergent

Q: Is $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ convergent? Indien so, wat is het?



Bron: Wikipedia

134

(b) Onbegrensde functie

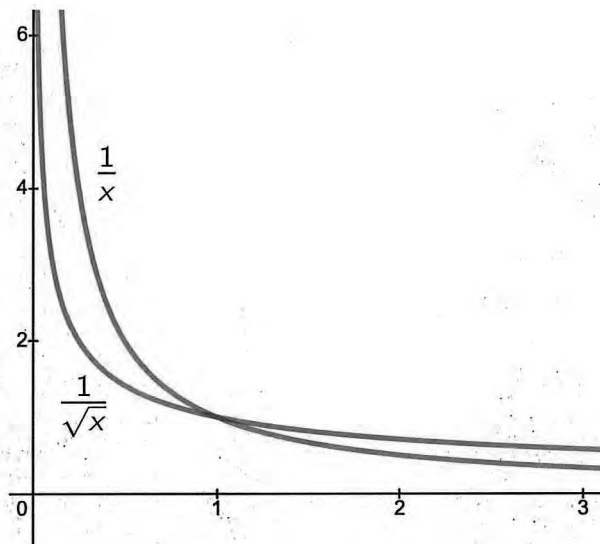
- Als f oneindig wordt in het punt $x = a$, dan stellen we per definitie:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

- Hierin is $\varepsilon > 0$ en $\varepsilon \rightarrow 0$ (rechterlimiet)
- Als de limiet bestaat dan noemen we de oneigenlijke integraal **convergent**, anders **divergent**

Voorbeelden

- ▶ $\int_0^3 \frac{1}{x} dx$ is divergent
- ▶ $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ is convergent



136

6.6 Riemann-integraal

We hebben $\int_a^b f(x) dx$ gedefinieerd als de oppervlakte onder de grafiek

Vraag: Wat is eigenlijk 'oppervlakte onder de grafiek' ?

Benadering met rechthoeken:

- ▶ Kies

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

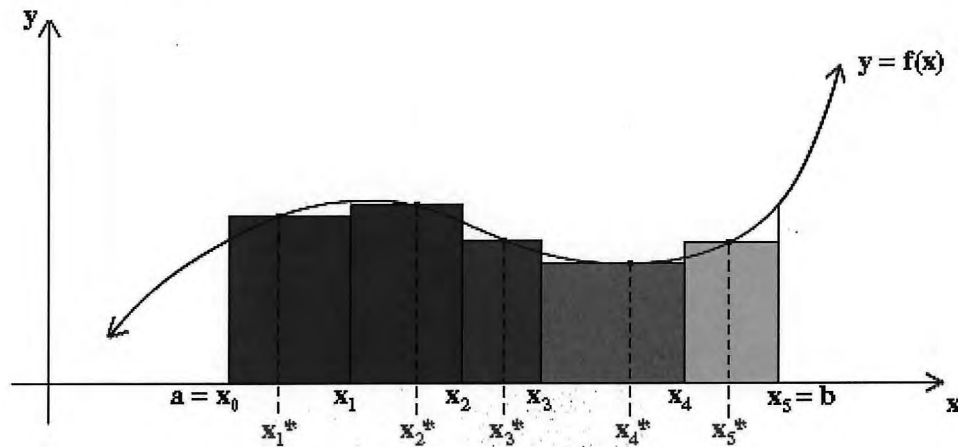
- ▶ Dit bepaalt deelintervallen $[x_{j-1}, x_j]$ voor $j = 1, \dots, n$
- ▶ Kies een hoogte y_j op elk deelinterval
- ▶ Vorm de som van oppervlakten van rechthoeken

$$\sum_{j=1}^n y_j \Delta x_j, \quad \Delta x_j = x_j - x_{j-1}$$

- ▶ Dit is een Riemann-som

137

Riemann-som

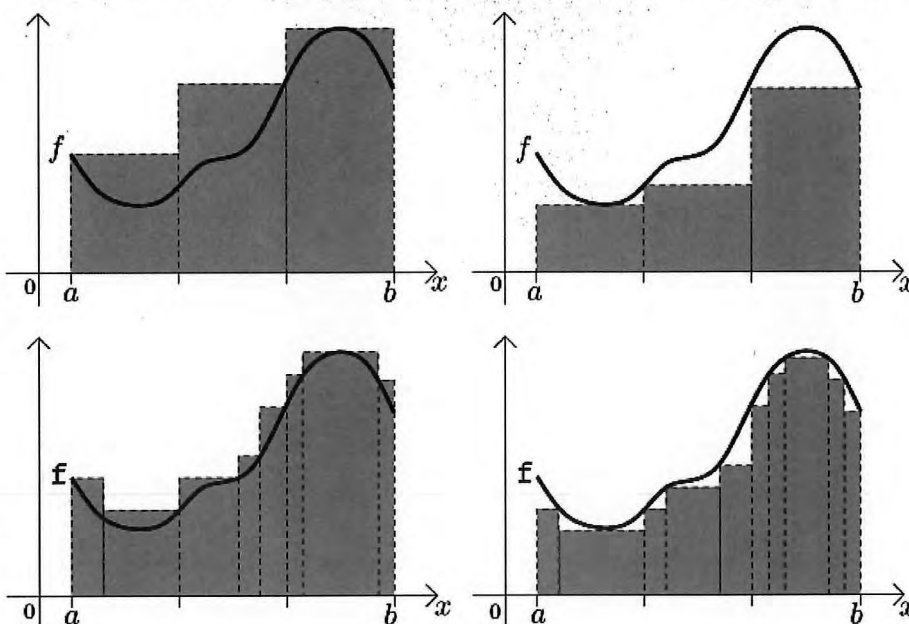


Bernhard Riemann (1826–1866)

138

Bovensom

- Neem $y_j = y_{j,\max}$, het maximum van f over $[x_{j-1}, x_j]$
- De som $\sum_{j=1}^n y_{j,\max} \Delta x_j$ noemen we een bovensom
- De echte oppervlakte onder de grafiek is kleiner

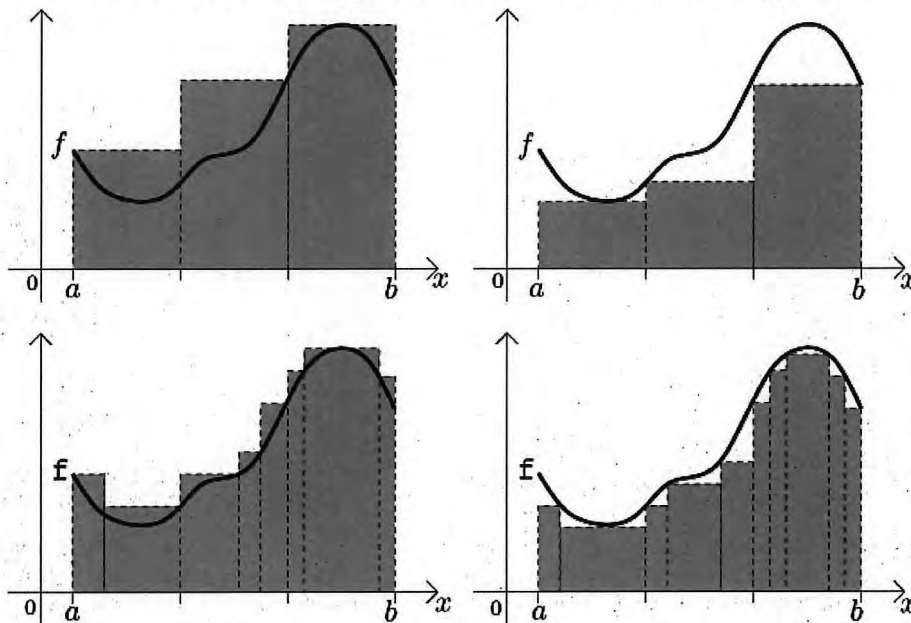


Bron:
MathTutor

139

Ondersom

- Neem $y_j = y_{j,\min}$, het minimum van f over $[x_{j-1}, x_j]$
- De som $\sum_{j=1}^n y_{j,\min} \Delta x_j$ noemen we een ondersom
- De echte oppervlakte onder de grafiek is groter



Bron:
MathTutor

140

Definitie van bepaalde integraal

- Neem steeds fijnere onderverdelingen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ waarbij $n \rightarrow \infty$ en $\max \Delta x_j \rightarrow 0$
- Als f continu is, dan voor zekere $S \in \mathbb{R}$ zal

$$\sum_{j=1}^n y_{j,\min} \Delta x_j \longrightarrow S$$

$$\sum_{j=1}^n y_{j,\max} \Delta x_j \longrightarrow S$$

- Antwoord: de oppervlakte onder de grafiek is deze grenswaarde S
- Als $y_{j,\min} \leq y_j \leq y_{j,\max}$ dan ook

$$\sum_{j=1}^n y_j \Delta x_j \longrightarrow S = \int_a^b f(x) dx$$

141

Equidistante punten

- Kies de punten op gelijke afstand $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$x_j = a + j\Delta x \quad \text{voor } j = 0, 1, \dots, n$$

- Dan geldt met de keuze $y_j = f(x_j)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta x \sum_{j=1}^n f(a + j\Delta x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n f\left(a + j \frac{b-a}{n}\right) \end{aligned}$$

- Rechteindepuntregel voor een benadering van de integraal

142

Trapeziumregel

- Keuze $y_j = f(x_j)$ geeft rechteindepuntregel
- Keuze $y_j = f(x_{j-1})$ geeft linkereindepuntregel
- Gemiddelde waarde

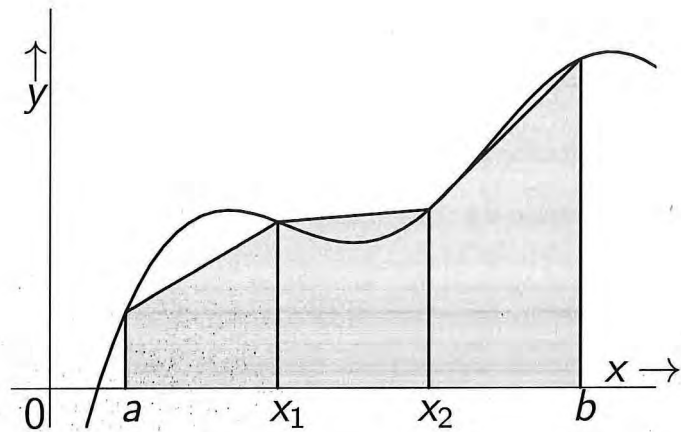
$$y_j = \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j))$$

geeft trapeziumregel

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} (f(x_{j-1}) + f(x_j)) \\ &= \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) \end{aligned}$$

143

Illustratie



- De trapeziumregel geeft een benadering voor de oppervlakte onder de grafiek door middel van een som van oppervlakten van trapezia

144

Foutschatting bij trapeziumregel

- Fout bij benadering door T_n : Als

$$|f''(x)| \leq M \quad \text{voor alle } x \in [a, b]$$

dan geldt

$$\left| \int_a^b f(x) dx - T_n \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 7

1. [§7.2] Wat is de lengte van een halfcirkel met radius 5?

Uitleg: De kromme is gegeven door

$$\begin{aligned}x(\theta) &= f(\theta) \cos \theta \\y(\theta) &= f(\theta) \sin \theta\end{aligned}$$

waar

$$f(\theta) = 5, \quad \theta \in [0, \pi].$$



De lengte van de kromme is dus

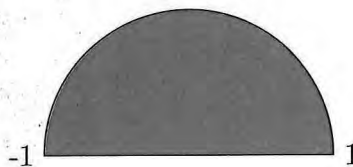
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{5^2 + 0^2} d\theta = \int_0^\pi 5 d\theta = 5\pi.$$

2. [§7.3] Wat is de oppervlakte van een half-schijf met radius 1?

Uitleg: De half-schijf is begrensd door de kromme

$$r = f(\theta) = 1, \quad \theta \in [0, \pi],$$

en de voerstralen $\theta = 0$ en $\theta = \pi$:



De oppervlakte is dus

$$\frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi 1^2 d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

3. [§7.4]

- a) Wat is het volume van een cilinder met radius R , hoogte h ?
- b) Wat is het volume van een kegel met radius R , hoogte h ?

Uitleg:

a) De cilinder ontstaat door de grafiek van de functie

$$f(x) = R, \quad x \in [0, h]$$

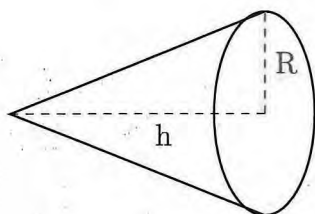
te wentelen rond de x -as. Het volume is

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h R^2 dx = \pi R^2 [x]_0^h = \pi R^2 h.$$

b) De kegel ontstaat door de grafiek van de functie

$$f(x) = \frac{R}{h}x, \quad x \in [0, h]$$

te wentelen rond de x -as. Merk op dat de grafiek van f een lijnstuk is die in $(0, 0)$ begint en in (h, R) eindigt.



Het volume is

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^h \left[\frac{R}{h}x \right]^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \underbrace{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h}_{=\frac{h^3}{3}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

4. [§7.5] Voor een continue massaverdeling op een lijn met massadichtheid $\rho(x) = 1$, waar $x \in [-1, 1]$:

a) Bereken het traagheidsmoment t.o.v. $x_0 = 0$

b) Bereken het traagheidsmoment t.o.v. $x_0 = 1$

Uitleg: We weten dat de traagheidsmoment t.o.v. een punt x_0 is

$$I = \int_a^b (x - x_0)^2 \rho(x) dx.$$

a)

$$I = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

b)

$$I = \int_{-1}^1 (x - 1)^2 dx = \left[\frac{(x - 1)^3}{3} \right]_{-1}^1 = 0 - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3}.$$

7. Toepassingen van integralen

Inhoud

- 7.1 Oppervlakte
- 7.2 Lengte van een kromme
- 7.3 Oppervlakte in poolcoördinaten
- 7.4 Volume van een omwentelingslichaam
- 7.5 Massaverdeling
- 7.6 Kansrekening
- 7.7 Krachtevelden

146

7.1 Oppervlakte

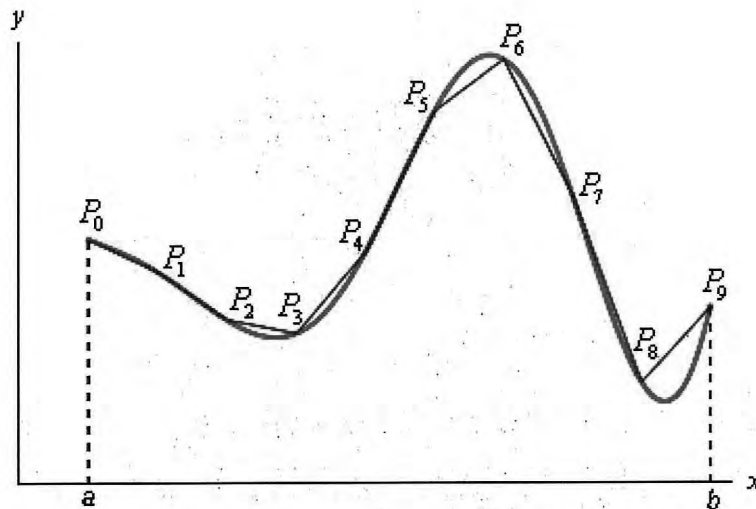
- ▶ **Lees zelf door. Reken de voorbeelden ook zelf na!**
- ▶ **Twee belangrijke punten:**
 - ▶ **Om de oppervlakte tussen een grafiek en de x -as te berekenen: rekening houden met het teken (het integratie-interval opsplitsen indien nodig)**
 - ▶ **Om de oppervlakte tussen twee krommen te berekenen: het verschil van de respectieve functies integreren.**
Ook hierbij opletten met het teken!

147

7.2 Lengte van een kromme

- **Kromme** $\mathcal{K} : y = f(x)$ met $a \leq x \leq b$
- **Lengte is**

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



Bron: Lamar University

148

Parametervergelijking

Algemener:

- stel dat $\mathcal{K}$ gegeven is door de parametervergelijking

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{met } a \leq t \leq b.$$

- **Lengte van $\mathcal{K}$ is**

$$\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Kromme in poolcoördinaten

Toepassing:

► Als $\mathcal{K}$ in poolcoördinaten gegeven wordt door

$$r = f(\theta) \quad \text{met } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

dan is een parametervergelijking voor $\mathcal{K}$:

$$x(\theta) = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta$$

$$y(\theta) = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta$$

► Lengte van $\mathcal{K}$ is

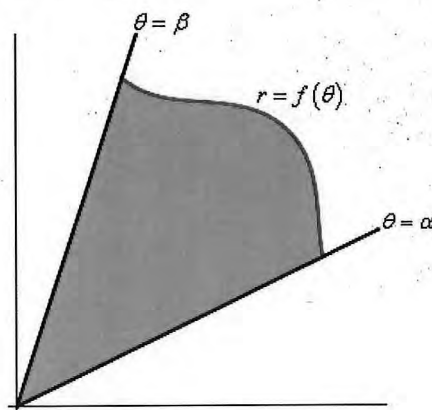
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

Q: Lengte van halfcirkel met radius 5?

150

7.3 Oppervlakte in poolcoördinaten

► Het gebied begrensd door de kromme $r = f(\theta)$ en de voerstralen $\theta = \alpha$ en $\theta = \beta$:



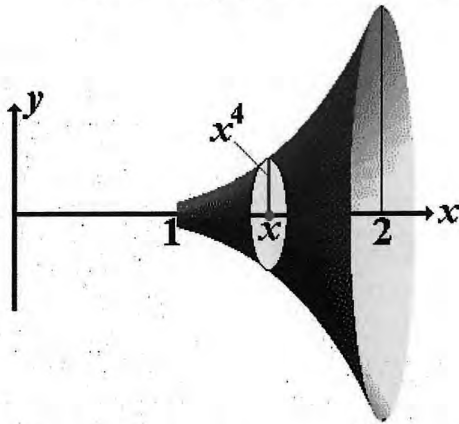
Bron: Lamar University

► De oppervlakte is
$$S = \frac{1}{2} \int_a^b [f(\theta)]^2 d\theta$$

Q: Oppervlakte van een half-schijf met radius 1?

7.4 Volume van een omwentelingslichaam

- **Omwentelingslichaam:** drie-dimensionaal volume dat ontstaat door een kromme rond een as te draaien
- Neem aan dat de kromme de grafiek van functie $y = f(x) > 0$ is, en dat we wentelen rond de x -as



Het volume is

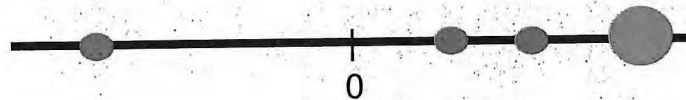
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Q: Volume van cilinder met radius R , hoogte h ?

Q: Volume van kegel met radius R , hoogte h ?

152

7.5 Massaverdeling



N massadeeltjes op één lijn: massa m_j in punt x_j

- De totale massa is $M = \sum_{j=1}^N m_j$
- Het eerste massamoment rond O : $\sum_{j=1}^N m_j x_j$
- Het massamiddelpunt is $X = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j x_j$
- Het tweede massamoment is $I = \sum_{j=1}^N m_j x_j^2$

(traagheidsmoment t.o.v. de oorsprong: geeft mate van verzet tegen verandering van draaisnelheid)

153

Continue massaverdeling op een lijn

Massadichtheid

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{massa in } [x, x + \Delta x]}{\Delta x}$$

- ▶ De totale massa is $M = \int_a^b \rho(x) dx$
- ▶ Het eerste massamoment rond O : $\int_a^b x \rho(x) dx$
- ▶ Het massamiddelpunt $X = \frac{1}{M} \int_a^b x \rho(x) dx$
- ▶ Het traagheidsmoment t.o.v. een punt x_0 :

$$I = \int_a^b (x - x_0)^2 \rho(x) dx$$

154

Voorbeeld

Voor massadichtheid $\rho(x) = 1$ met $x \in [-1, 1]$:

Q: Bereken het traagheidsmoment t.o.v. $x_0 = 0$

Q: Bereken het traagheidsmoment t.o.v. $x_0 = 1$

Q: Welk is groter?

Te herinnering: traagheidsmoment t.o.v. een punt x_0 is

$$I = \int_a^b (x - x_0)^2 \rho(x) dx$$

7.6 Kansrekening

N mogelijke uitkomsten van een experiment: $x_1, \dots, x_N$.

Kans p_j op waarde x_j : $0 \leq p_j \leq 1$, $\sum p_j = 1$.

- **De gemiddelde waarde (of verwachtingswaarde):**

$$\mu = \sum_{j=1}^N p_j x_j$$

- **Variantie:**

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N p_j (x_j - \mu)^2$$

- **Standaardafwijking:**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N p_j (x_j - \mu)^2}$$

156

Continue kansverdeling

- **Experiment met waarden in $[a, b]$ of in $\mathbb{R}$**
- **Kansdichtheid**

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{kans dat uitkomst ligt in } [x, x + \Delta x]}{\Delta x}$$

- **Er geldt $p(x) \geq 0$ en $\int_a^b p(x) dx = 1$.**
- **Als $[c, d] \subset [a, b]$ dan is**

$$\int_c^d p(x) dx$$

de kans dat de uitkomst van het experiment ligt in het interval $[c, d]$

157

Grootheden bij continue kansverdeling

- **Gemiddelde waarde (of verwachtingswaarde):**

$$\mu = \int_a^b x p(x) dx$$

- **Variantie:**

$$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 p(x) dx$$

- **Standaardafwijking:**

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\int_a^b (x - \mu)^2 p(x) dx}$$

(maat voor spreiding van kansverdeling rond μ)

158

7.7 Krachtenvelden

Dit slaan we over

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 8

1. [§8.2] Bereken

$$I = \int \sin^2 x \, dx.$$

Uitleg: We gebruiken de goniometrische identiteit $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. Dus

$$I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$$

2. [§8.3] Bereken

$$I = \int x e^{-x^2} dx.$$

Verifieer je antwoord door de afgeleide te nemen

Uitleg: We gebruiken de substitutieregels: stel

$$u(x) = x^2,$$

zodat $\frac{du}{dx} = 2x$ en

$$du = 2x \, dx.$$

Dan

$$I = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = \frac{1}{2} (-e^{-u} + C_1) = \frac{1}{2} (-e^{-x^2} + C_1) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C_2$$

waar C_1 en C_2 constanten zijn.

Verificatie: omwille van de kettingregel,

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \cdot (-2x) = x e^{-x^2}.$$

3. [§8.3] Bereken

$$I = \int \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

Uitleg: Zie Voorbeeld 8.3.8 in de cursustekst, met $a = 1$. (In de les, met de substitutie $x = \sin \theta$ met $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, hebben we gezien dat $I = \int \cos^2 \theta d\theta$.)

4. [§8.3] Bereken

$$I = \int_0^1 (3x - 1)^9 dx.$$

Uitleg: We gebruiken de substitutieregels: stel

$$u(x) = 3x - 1,$$

zodat $\frac{du}{dx} = 3$ en

$$du = 3 \, dx.$$

Omdat $u(0) = -1$ en $u(1) = 2$, is

$$I = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 u^9 du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^{10}}{10} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2^{10}}{10} - \frac{(-1)^{10}}{10} \right) = \frac{1}{30} (2^{10} - 1).$$

5. [§8.4] Bereken

$$I = \int x e^{ax} dx$$

waar $a \neq 0$. Verifieer je antwoord door de afgeleide te nemen.

Uitleg: We gebruiken partiële integratie: stel

$$u(x) = x, \quad v'(x) = e^{ax}$$

zodat

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \frac{e^{ax}}{a}.$$

Dan

$$I = uv - \int u'v dx = x \frac{e^{ax}}{a} - \underbrace{\int 1 \cdot \frac{e^{ax}}{a} dx}_{= \frac{e^{ax}}{a^2} + C} = x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} - C.$$

Verificatie: omwille van de productregel,

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \right) = \frac{e^{ax}}{a} + x e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a} = x e^{ax}.$$

6. [§8.6] Bereken

$$I = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx.$$

Verifieer je antwoord door de afgeleide te nemen.

Uitleg: Deze is een integral van het “type iii)” in de les, omdat de discriminant is $(-4)^2 - 4 \cdot 7 < 0$. We schrijven de noemer als

$$x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 4x + 4) + 3 = (x - 2)^2 + 3.$$

De substitutie $u = x - 2$ in de integraal geeft

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(x-2)^2 + 3} dx = \int \frac{1}{u^2 + (\sqrt{3})^2} du = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtan} \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

Dus is $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right)$ een primitieve functie van $\frac{1}{x^2 - 4x + 7}$. We verifiëren dit door de afgeleide te nemen:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{bgtan} \left(\frac{x-2}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(x-2)^2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3 + (x-2)^2} = \frac{1}{x^2 - 4x + 7}.$$

7. [§8.7] Bereken

$$I = \int \frac{1}{\cos \theta} d\theta.$$

Uitleg: Zoals in de les gezien, is het hulprijke om de substitutie $x = \tan \frac{\theta}{2}$ te gebruiken.

We weten dat $d\theta = \frac{2}{1+x^2} dx$ en $\cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. Dus

$$I = \int \frac{1+x^2}{1-x^2} \cdot \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{2}{1-x^2} dx$$

Nu kunnen we de integrand in partieelbreuken splitsen:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}.$$

Dus

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{1-x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx = -\ln(|1-x|) + \ln(|1+x|) + C \\ &= \ln \left(\frac{|1+x|}{|1-x|} \right) + C \\ &= \ln \left(\frac{|1+\tan \frac{\theta}{2}|}{|1-\tan \frac{\theta}{2}|} \right) + C. \end{aligned}$$

8. Integratietechnieken

Inhoud

- 8.1 Inleiding
- 8.2 Goniometrische identiteiten
- 8.3 Substitutiemethode
- 8.4 Partiële integratie
- 8.5 Reductieformules
- 8.6 Rationale functies en partieelbreuken
- 8.7 Integralen met een parameter

160

8.1 Inleiding

Basismethode om integralen te berekenen:

- **Bereken de onbepaalde integraal:**

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Je moet dus een primitieve van f vinden. Soms is dat moeilijk!

- **Voor een bepaalde integraal, vul je daarna de grenzen in:**

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

161

Belangrijke opmerking

- Een onbepaalde integraal die je berekend hebt, kan je steeds verifiëren door de afgeleide te nemen:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{als en slechts als} \quad \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

- Deze verificatie is meestal gemakkelijk, en garandeert dat je de onbepaalde integraal juist berekend hebt.
- Doe deze verificatie dan ook!

162

8.2 Goniometrische identiteiten

- Gebruik gekende goniometrische identiteiten uit §3.1 om de gegeven formule te vereenvoudigen.

Bv:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Q: Bereken

$$\int \sin^2 x dx$$

163

8.3 De substitutiemethode

Deze regel voor integralen is gebaseerd op de kettingregel voor afgeleiden.

Voorbeeld: Bereken

$$\int \cos x (\sin x)^5 dx$$

- We gaan over op nieuwe veranderlijke:

$$u = \sin x,$$

zodat $\frac{du}{dx} = \cos x$, en dus

$$du = \cos x dx.$$

- De substitutieregel zegt

$$\int \cos x (\sin x)^5 dx = \int u^5 du$$

164

Substitutiemethode (vervolg)

$$\int \cos x (\sin x)^5 dx = \int u^5 du$$

- Bereken integraal voor u :

$$\int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + C$$

- Ga terug naar de x veranderlijke via $u = \sin x$:

$$\int \cos x (\sin x)^5 dx = \frac{1}{6} (\sin x)^6 + C$$

Q: Bereken $\int x e^{-x^2} dx$

Verifieer je antwoord door de afgeleide te nemen

De substitutie $x = x(\theta)$

Voorbeeld 8.3.8: Bereken

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

► **We stellen**

$$x = \sin \theta, \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

zodat

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta, \quad \text{en dus} \quad dx = \cos \theta d\theta.$$

► **De substitutieregel zegt**

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \underbrace{\sqrt{1-(\sin \theta)^2}}_{=\cos \theta} \cdot \cos \theta d\theta = \int \cos^2 \theta d\theta$$

► **Bereken dit, ga terug naar de x veranderlijke.**

166

Bepaalde integralen

► **Bij bepaalde integralen moeten de integratiegrenzen mee transformeren:**

integratie met grenzen $x = a$ tot $x = b$ wordt

integratie met grenzen $u = u(a)$ tot $u = u(b)$

Voorbeeld: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\sin x)^5 dx$

► **Met $u = \sin x$ hebben we gezien dat**

$$\int \cos x (\sin x)^5 dx = \int u^5 du$$

► **Dus**

$$I = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} u^5 du = \left[\frac{u^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Q: Bereken $\int_0^1 (3x-1)^9 dx$

167

8.4 Partiële integratie

- Voor functies $u(x)$ en $v(x)$, bezegt de productregel:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

- Neem de onbepaalde integral:

$$uv = \int u'v \, dx + \int uv' \, dx$$

- Dit is equivalent met

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

- De partiële integratie is dus een omkering van de productregel

168

Voorbeelden

Voorbeeld: bereken $I = \int x \cos x \, dx$.

- Stel

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \cos x$$

- Dus

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \sin x$$

- Partiële integratie geeft

$$I = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Q: Bereken $\int x e^{ax} \, dx$ waar $a \neq 0$

Verifieer je antwoord door de afgeleide te nemen

8.5 Reductieformules

Lees zelf door.

Voorbeeld 8.5.2:

- Stel ($n \geq 2$)

$$I_n = \int \cos^n x \, dx$$

- Deze techniek geeft via partiële integratie de recursiebetrekking

$$I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

- Dit wordt meestal gebruikt om een macht n te verlagen

170

8.6 Rationale functies en partieelbreuken

Een rationale functie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

kan altijd geschreven worden als een som van een veelterm en partieelbreuken:

- (i) $\frac{1}{x-a}$ met $a \in \mathbb{R}$
- (ii) $\frac{1}{(x-a)^n}$ met $a \in \mathbb{R}$ en $n \geq 2$
- (iii) $\frac{ax+b}{x^2+px+q}$ met $p^2-4q < 0$
- (iv) $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ met $p^2-4q < 0$ en $n \geq 2$

171

Types (i) en (ii) zijn eenvoudig

Dit is nuttig om een rationale functie te integreren.

► **Type (i)**

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$$

► **Type (ii)**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)^n} dx &= \int (x-a)^{-n} dx \\ &= \frac{1}{-n+1} (x-a)^{-n+1} + C \\ &= \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C\end{aligned}$$

172

Type (iii)

► **Type (iii)**

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q} dx$$

► **Splits een kwadraat af in de noemer**

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{=r^2 > 0}$$

► **Substitueer** $u = x + \frac{p}{2}$

► **Dit leidt tot een som van standaardintegralen**

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2 + r^2} du &= \frac{1}{r} \arctan \frac{u}{r} + C \\ \int \frac{u}{u^2 + r^2} du &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + r^2) + C\end{aligned}$$

Q: $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx = ?$

Verifieer je antwoord

173

Toepassing: lengte van de exponentiële kromme

Voorbeeld 8.6.4:

de kromme $y = f(x) = e^x$ tussen $x = 1$ en $x = 2$

- De lengte van dit stuk vinden we als

$$\int_1^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx.$$

- Substitueer

$$u^2 = 1 + e^{2x},$$

dan is $2u \frac{du}{dx} = 2e^{2x}$ en dus

$$\int_1^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx = \int_{\sqrt{1+e^2}}^{\sqrt{1+e^4}} u \frac{u}{u^2 - 1} du$$

- splits in partieelbreuken van type i), integreer

174

Toepassing: goniometrische integralen

- Integralen met rationale uitdrukkingen in $\sin \theta$ en $\cos \theta$, zoals

$$\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta, \quad \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta$$

- Met de substitutie

$$x = \tan \frac{\theta}{2}, \quad \theta = 2 \arctan x, \quad d\theta = \frac{2}{1+x^2} dx$$

worden ze teruggebracht tot een integraal van een rationale functie

- Er gelden namelijk de goniometrische formules

$$\sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

175

Voorbeelden

► **Voorbeeld 8.6.5:** $I = \int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$

► **Na substitutie** $x = \tan(\theta/2)$:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^{-1} \frac{2}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx \\ &= \ln |x| + C \\ &= \ln |\tan(\theta/2)| + C. \end{aligned}$$

Q: $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = ?$

176

8.7 Integralen met een parameter

► **Voor elke** $\alpha > 0$ **hebben we de integraal**

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

► **We mogen afleiden ‘doorheen het integraalteken’**

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} I(\alpha) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{d\alpha} e^{-\alpha x} \right) dx \\ &= - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx \end{aligned}$$

► **Dit leidt tot**

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx &= - \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \end{aligned}$$

177

7/11/2019

Misk-hoon college

*Q: $\int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx$

~~$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} dx = \int \frac{1}{(x-2)^2 + 3} dx$~~

$= \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4) + 3} = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + 3}$

$= \int \frac{dx}{t^2 + 3}$

$x - 2 = t$
 $dx = dt$

$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{t^2}{3} + 1}$

$\frac{t}{\sqrt{3}} = u$

$\frac{1}{\sqrt{3}} dt = du$

$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \int \frac{dx}{u^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{Bgtan} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$

$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$

*Q: $\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta =$

~~$\int \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$~~

$\int \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$

$= \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta + \int \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta$

$= \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta d\theta + \int \cos \theta d\theta$

$\int \tan \theta \cdot \sin \theta d\theta + \int \cos \theta d\theta$

$\tan \theta = x$
 $\frac{1}{\sin^2 \theta} d\theta = dx$

$\int \frac{1}{\cos \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta$

$\int \frac{1}{1 - t^2} dt = \int \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} dt = \dots$

$\sin \theta d\theta = dx$

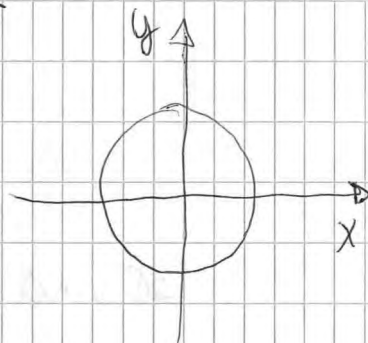
$\int \sin \theta = t$
 $\int \cos \theta d\theta = dt$

14/11/19

Wisk - hoorcollege

* Q: vgl raaklijn à de niveaukur v. $f(x,y) = x^2 + y^2$ in $(0,1)$ en $(1,1)$?

~~1) Raaklijn in $(0,1)$ en $(1,1)$~~



$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx}$$

$$0 = 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{-2x}{2y} = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow \frac{-x}{y} = \frac{dy}{dx}$$

$$\textcircled{1} \rightarrow \text{in } (0,1) \Rightarrow \frac{-0}{1} = \frac{dy}{dx} = 0 = \frac{-a}{b}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow \text{in } (1,1) \Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{dy}{dx} = -1 = \frac{-a}{b}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\text{vgl raakl. } \textcircled{1}: y - 1 = 0(x - 1)$$

$$y = 1$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

$$\text{vgl. raakl. } \textcircled{2}: y - 1 = -1(x - 1)$$

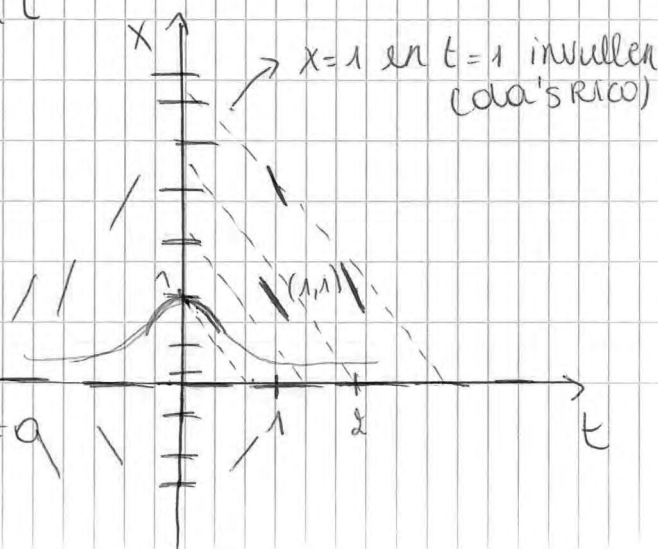
$$y - 1 = -x + 1$$

$$y = -x + 2$$

hfst 10

* Q: voor DV : $x'(t) = -x \cdot t$

1) teken lijnelementen:



2) alle opl'en $x(0) = 0$

$x(t) \equiv 0$ is een opl. met $x(0) = 0$

stelling $\Rightarrow$ unieke opl.

3) ^{aanduiding 1)} $t=0$ en $x=1$

$$x'(t) = -tx \begin{cases} = 0 & \text{als } t=0 \\ > 0 & \text{als } t < 0 \\ < 0 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x(t)$ heeft lokaal max. in $t=0$

~~so~~ vind alle opel v. DV. $x'(t) = -xt$

$$-\int \frac{1}{x} dx = \int t dt$$

$$-\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C_0$$

$$\ln|x| = -\frac{t^2}{2} + C_0$$

$$|x| = e^{-t^2/2} \cdot e^{C_0}$$

$$x = \pm e^{-t^2/2} \cdot e^{C_0}$$

$$x = \pm e^{-t^2/2} \cdot C$$

$$(C = \underbrace{e^{C_0}}_{\in \mathbb{R}_0})$$

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 9

1. [§9.3] Bereken de raakvlak aan de grafiek van

$$f(x, y) = xy$$

in de punt $(0, 0, 0)$ en in de punt $(1, 1, 1)$.

Uitleg: Het raakvlak aan de grafiek van f in het punt (x_0, y_0, z_0) heeft als vergelijking

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Hier is $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0)$ de partiële afgeleide van f naar x uitgerekend in (x_0, y_0) .

We hebben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

en

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) = y_0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) = x_0.$$

De vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt (x_0, y_0, z_0) is dus

$$z - z_0 = y_0 \cdot (x - x_0) + x_0 \cdot (y - y_0).$$

- Voor $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ is de vergelijking dus

$$z = 0.$$

- Voor $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ is de vergelijking dus

$$z - 1 = (x - 1) + (y - 1),$$

wat geschreven kan worden als

$$z = x + y - 1.$$

2. [§9.4] Vergelijking voor raaklijn aan de niveaукromme van

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

in $(0, 1)$ en $(1, 1)$?

Uitleg: De vergelijking van de raaklijn in het punt (x_0, y_0) is

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

We hebben

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

en

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0) = 2x_0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0) = 2y_0.$$

De vergelijking is dus

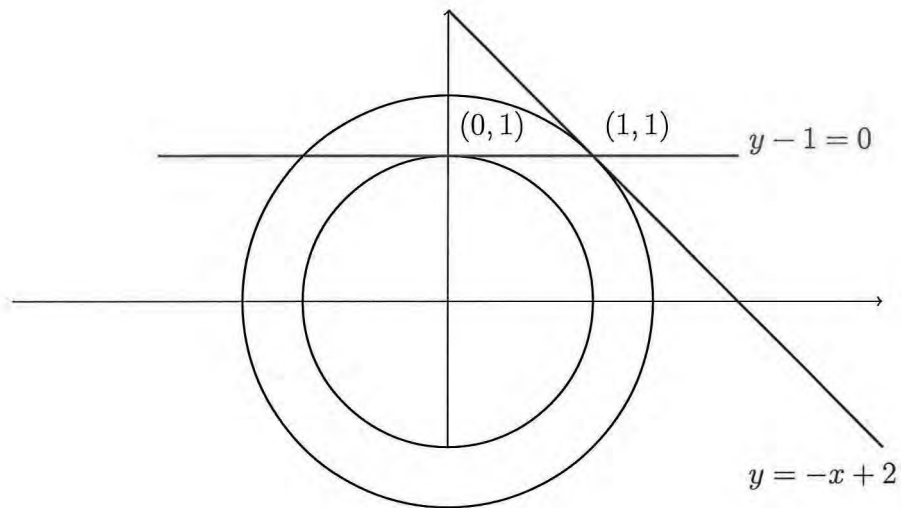
$$x_0 \cdot (x - x_0) + y_0 \cdot (y - y_0) = 0.$$

- Voor $(x_0, y_0) = (0, 1)$ is de vergelijking dus

$$y - 1 = 0.$$

- Voor $(x_0, y_0) = (1, 1)$ is de vergelijking dus $x + y - 2 = 0$, wat we kunnen schrijven als

$$y = -x + 2.$$



9. Functies van twee en meer veranderlijken

Inhoud

- 9.1 Grafische voorstelling
- 9.2 Partiële afgeleiden
- 9.3 Totale differentiaal
- 9.4 Totale afgeleide

178

9.1 Grafische voorstelling

- ▶ Grootheden kunnen afhangen van meer dan één veranderlijke
 - ▶ Temperatuur hangt af van drie plaatscoördinaten, x , y , z , en van de tijd t :

$$T(x, y, z, t)$$

- ▶ De afstand tussen punten $P : (x_1, y_1, z_1)$ en $Q : (x_2, y_2, z_2)$ is een functie van zes veranderlijken $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$
- ▶ In deze cursus bekijken we vooral functies van twee veranderlijken

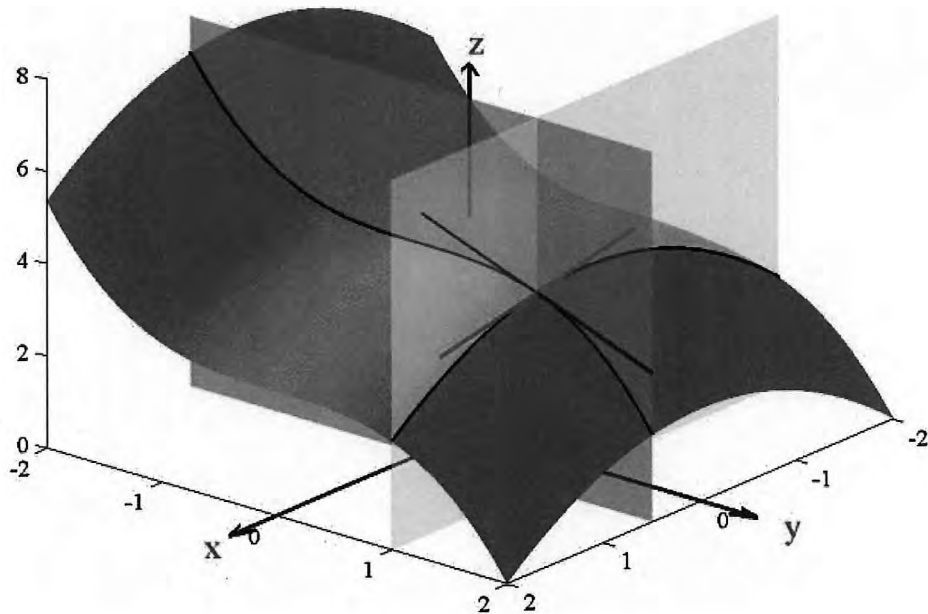
$$z = f(x, y)$$

179

Grafiek

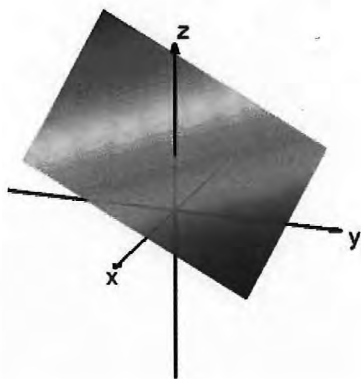
- De grafiek van $z = f(x, y)$ bestaat uit de punten

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{met} \quad z = f(x, y)$$



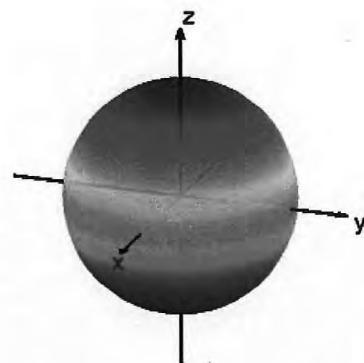
180

Meer voorbeelden



Vlak $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = 1$
Grafiek van

$$z = f(x, y) = 1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$$



Boloppervlak $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
Bovenkant is grafiek van

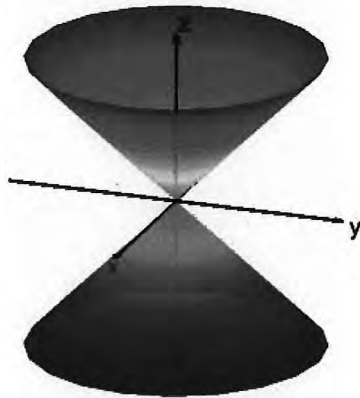
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Onderkant is grafiek van

$$z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

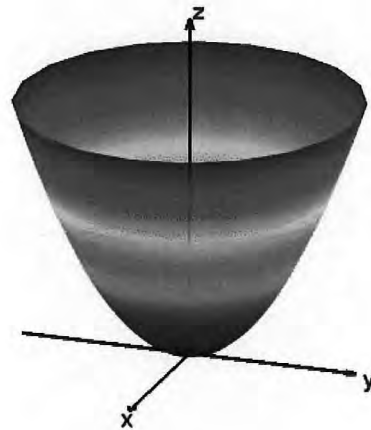
181

Meer voorbeelden



Kegel $z^2 = x^2 + y^2$
Bovenkant is grafiek van

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Paraboloid
Grafiek van

$$z = x^2 + y^2$$

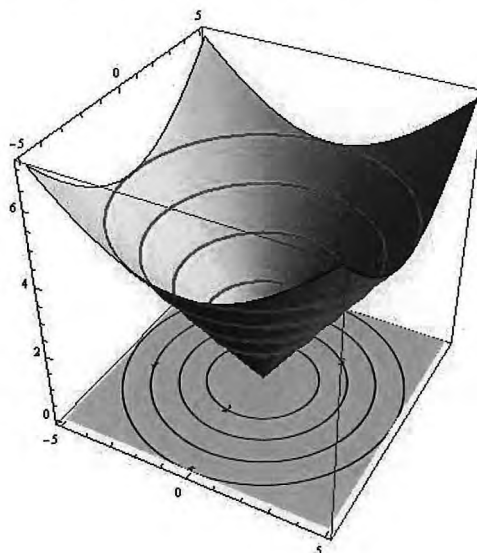
182

Niveaукrommen en contourplot

- De **niveaукromme** van $z = f(x, y)$ bij het niveau c is de kromme met de vergelijking

$$f(x, y) = c$$

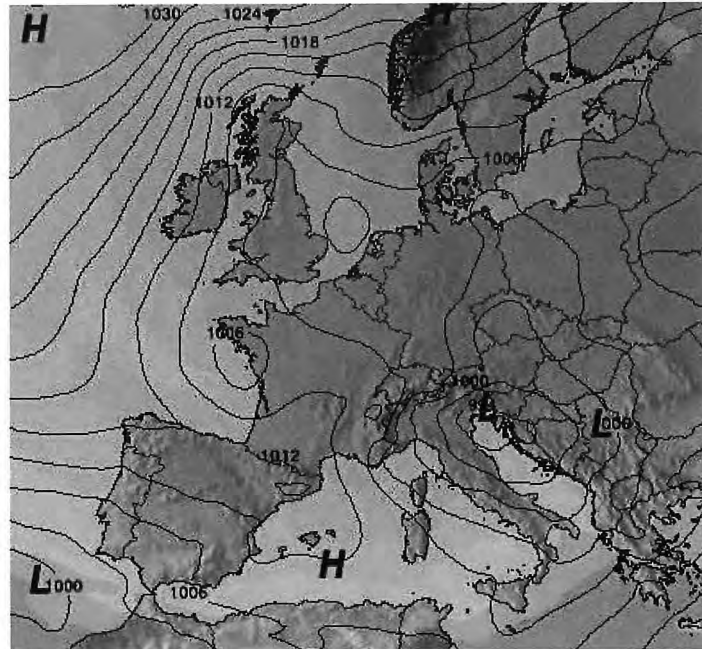
- Een aantal niveaукrommen (met verschillende niveaus c) vormen samen een **contourplot** van f .



183

Voorbeeld: Isobaren op weerkaarten

- Isobaren zijn niveaукrommen van de druk $p(x, y)$, die afhangt van de breedtegraad x en de lengtegraad y



184

9.2 Partiële afgeleiden

- Hoe verandert een functie

$$z = f(x, y)$$

als we x en/of y laten variëren?

- Stel dat we alleen x veranderen met Δx , terwijl y constant blijft
- Dan verandert $z = f(x, y)$ ook, met

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

- De relatieve verandering is

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

185

Partiële afgeleide naar x

- De partiële afgeleide van f naar x is

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\end{aligned}$$

als de limiet bestaat

186

Partiële afgeleide naar y

- Analoog is de partiële afgeleide van f naar y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

als de limiet bestaat

- Dit zijn in feite gewone afgeleiden waarbij één van de veranderlijken als constant beschouwd wordt
- Andere notatie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

187

Gradiënt

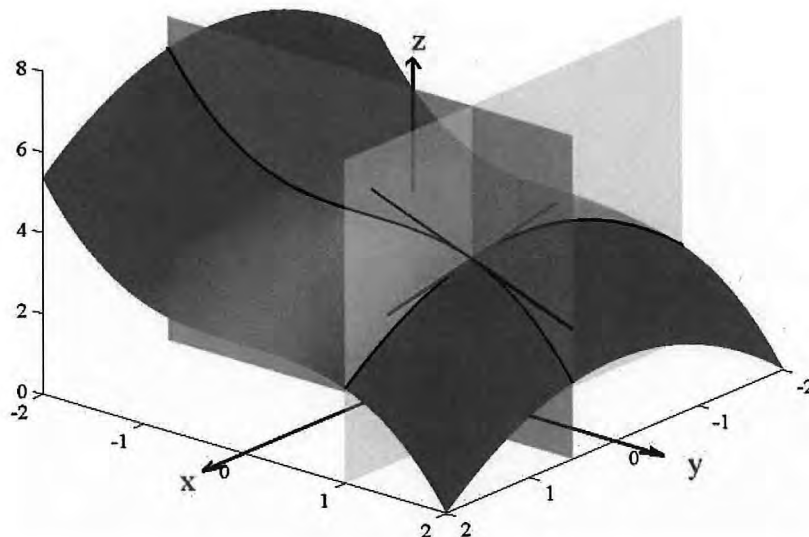
► Het koppel

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

noemen we de **gradiënt** van f .

188

Meetkundige interpretatie



- De partiële afgeleiden zijn richtingscoëfficiënten van raaklijnen aan de grafiek.
- Deze twee raaklijnen bepalen het raakvlak aan de grafiek.

189

Hogere orde partiële afgeleiden

- ▶ De partiële afgeleide hangt af van het punt (x, y) en is dus zelf ook een functie van twee veranderlijken
- ▶ We zouden die weer kunnen afleiden naar x of y
- ▶ Zo krijgen we vier tweede orde partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

190

Voorbeeld

Neem de functie $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$

- ▶ De eerste orde partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{en} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6xy + 3y^2$$

- ▶ De tweede orde partiële afgeleiden zijn

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -6y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6y \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6x + 6y$$

191

Gemengde partiële afgeleiden

- ▶ **Stelling van Schwarz en Young:**

Als de eerste en tweede orde partiële afgeleiden continue functies zijn, dan

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

- ▶ Het maakt dus niet uit in welke volgorde de partiële afgeleiden genomen worden

192

Meer dan twee veranderlijken

- ▶ **Stel een functie van n veranderlijken**

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

- ▶ **De partiële afgeleide naar veranderlijke x_j :**

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

- ▶ **De gradiënt is**

$$\text{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- ▶ **De tweede orde partiële afgeleiden zijn**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}.$$

193

9.3 Totale differentiaal

Zij $z = f(x, y)$.

- ▶ **Als het punt (x, y) verandert naar $(x + \Delta x, y)$ dan**

$$= f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x$$

- ▶ **Als (x, y) verandert naar $(x, y + \Delta y)$ dan**

$$= f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y$$

- ▶ **Wat gebeurt er als $\Delta x \neq 0$ en $\Delta y \neq 0$?**

- ▶ **Hoofdresultaat:**

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &\approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y \end{aligned}$$

194

Met differentialen

- ▶ **Met differentialen (=infinitesimale veranderingen):**

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy$$

- ▶ **dz noemen we de totale differentiaal**

Raakvlak aan de grafiek

- Uit hoofdresultaat in punt $x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$ en naburig punt $x, y, z = f(x, y)$:

$$z - z_0 \approx \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (y - y_0)$$

- Het raakvlak aan de grafiek van f in het punt (x_0, y_0, z_0) heeft als vergelijking

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (y - y_0)$$

- Partiële afgeleiden worden uitgerekend in (x_0, y_0) .

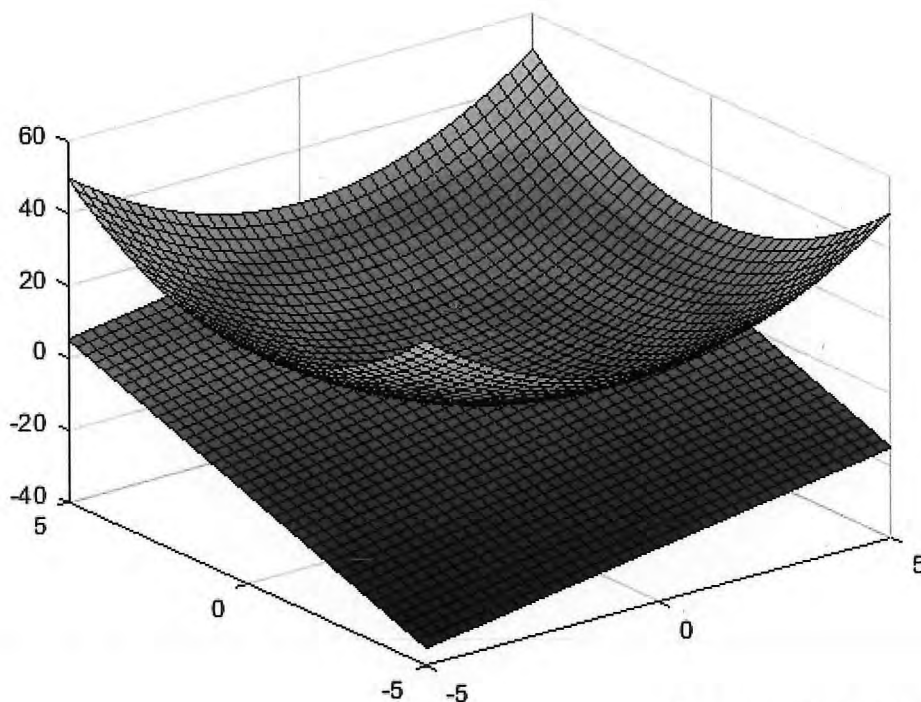
Q: Bereken de raakvlak aan de grafiek van

$$f(x, y) = xy$$

in de punt $(0, 0, 0)$ en in de punt $(1, 1, 1)$

196

Raakvlak: illustratie



Bron: MathWorks

197

9.4 Totale afgeleide

- Neem $z = f(x, y)$ en stel dat x en y afhangen van een extra veranderlijke t :

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

- De samenstelling

$$z = f(x(t), y(t))$$

is dan een functie van één veranderlijke t

- De totale afgeleide is $\frac{dz}{dt}$, de afgeleide van z naar t

198

Kettingregel

- Het hoofdresultaat in §9.3 was:

$$\Delta z \approx \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Delta y$$

- Deel door Δt en laat $\Delta t \rightarrow 0$
- Dit geeft het verband tussen de totale afgeleide $\frac{dz}{dt}$ en de partiële afgeleiden $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt}$$

- Speciaal geval: $z = f(x, y(x))$, een functie van x .
Dan

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx}$$

199

Raaklijn aan niveaukromme

- Een niveaukromme van $z = f(x, y)$ heeft als vergelijking

$$f(x, y) = c$$

- Neem aan dat $(x, y(x))$ een parametrisatie van een niveaukromme is:

$$z = f(x, y(x)) = c$$

- Vanwege de kettingregel

$$0 = \frac{dz}{dx} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dx}$$

- Het volgt hieruit

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

200

Raaklijn aan niveaukromme (vervolg)

- De raaklijn heeft richtingscoëfficiënt $\frac{dy}{dx}$
- Vergelijking van de raaklijn in het punt (x_0, y_0) is dus

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

met

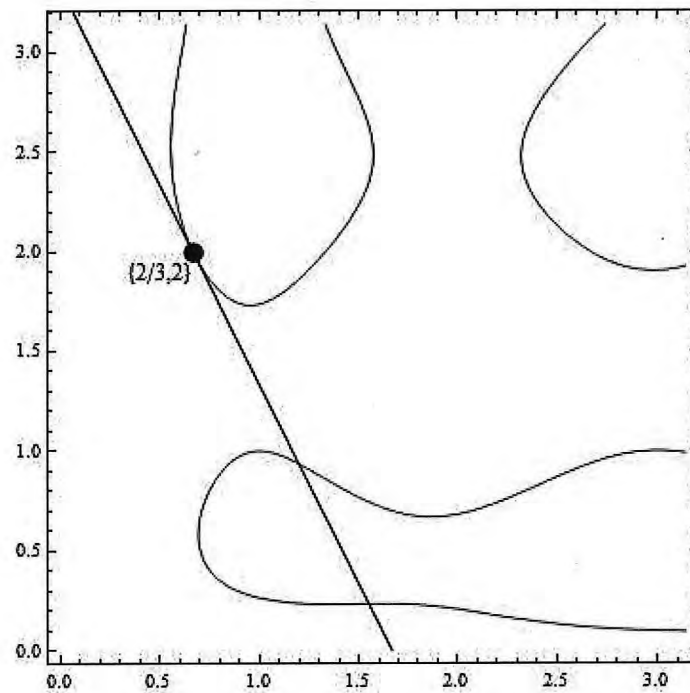
$$a = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Q: Vergelijking voor raaklijn aan de niveaukromme van

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

in $(0, 1)$ en $(1, 1)$?

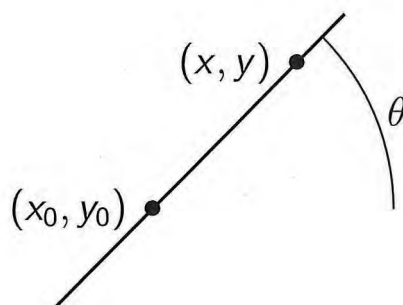
Illustratie



Bron: Mathematica

202

Richtingsafgeleide



- Stel $z = f(x, y)$ en

$$x = x_0 + t \cos \theta, \quad y = y_0 + t \sin \theta$$

met vaste θ .

- Dan is

$$\frac{dx}{dt} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = \sin \theta.$$

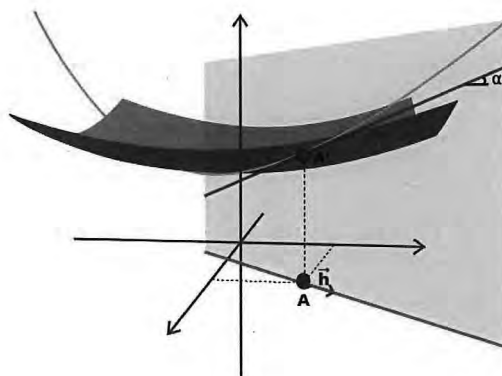
203

Richtingsafgeleide (vervolg)

- De totale afgeleide is

$$D_{\theta}f = \frac{dz}{dt} = \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y}$$

- Dit is de richtingsafgeleide van $z = f(x, y)$ in de richting die hoek θ maakt met de positieve x-as
- De partiële afgeleiden worden uitgerekend in (x_0, y_0)



Bron: Wikipedia

204

Richtingsafgeleide (vervolg)

- Schrijf de gradiënt in poolcoördinaten:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = r \cos \phi, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = r \sin \phi$$

voor zekere $r \geq 0$ and ϕ

- Dan geldt er

$$\begin{aligned} D_{\theta}f &= r \cos \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi \\ &= r \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

Conclusie:

- De richtingsafgeleide is maximaal als $\theta = \phi$:
in richting van de gradiënt
- De richtingsafgeleide is minimaal als $\theta = \phi \pm \pi$
- De richtingsafgeleide is nul als $\theta = \phi \pm \frac{\pi}{2}$:
loodrecht op de gradiënt

205

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 10

1. [§10.3] Voor de DV

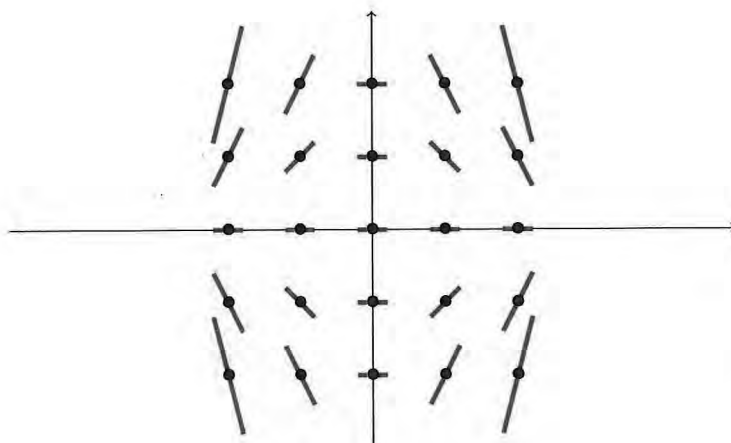
$$x' = -x \cdot t$$

- 1) teken enkele lijnelementen
- 2) vind alle oplossingen met $x(0) = 0$
- 3) als $x(t)$ een oplossing is met $x(0) = 1$, heeft $x(t)$ in $t = 0$ een lokale maximum, een lokale minimum, of geen van beide?

Om deze vragen te beantwoorden, het is niet nodig om de DV op te lossen!

Uitleg:

1)



2) $x(t) = 0$ is een oplossing met $x(0) = 0$, als je kan narekenen door in de DV in te vullen.

Omwille van de “existentie en uniciteit stelling” in de les, is deze de enige oplossing. (De stelling mogen we toepassen omdat er aan de voorwaarden voldaan is: $f(x, t) = -xt$ is continu, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = -t$ is continu.)

3) Zij $x(t)$ de oplossing met $x(0) = 1$. (Er is maar één oplossing met deze eigenschap, als gevolg van de “existentie en uniciteit stelling”.) Dan

$$x'(t) = -t \cdot x(t) \begin{cases} > 0 & \text{als } t < 0 \\ = 0 & \text{als } t = 0 \\ < 0 & \text{als } t > 0. \end{cases}$$

Hier hebben we gebruikt dat $x(t) > 0$, als gevolg van $x(0) = 1 > 0$.

Het volgt eruit dat $x(t)$ een lokaal maximum heeft in $t = 0$.

2. [§10.4] Vind alle oplossingen van de DV

$$x'(t) = -x \cdot t$$

Merk op: deze is dezelfde DV als in 1. boven

Uitleg: Omdat $x = 0$ het enige nulpunt van $f(x) = x$ is, is $x(t) = 0$ de enige constante oplossing.

Scheiding van veranderlijken:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -t dt \\ \int \frac{dx}{x} &= - \int t dt \\ \ln |x| &= -\frac{t^2}{2} + C_0 \\ |x| &= e^{C_0} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ x &= \pm e^{C_0} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= C e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{met } C \neq 0.\end{aligned}$$

Dus is de algemene oplossing

$$x = C e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \text{met } C \in \mathbb{R}.$$

3. [§10.8] Vind alle oplossingen van

$$x' + tx = e^t e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Uitleg: Volgende week

10. Eerste orde Differentiaalvergelijkingen

Inhoud

- 10.1 Inleiding
- 10.2 Oplossingen van een DV
- 10.3 Eerste orde DV
- 10.4 Scheidbare veranderlijken
- 10.5 Logistiek model
- 10.6 Exacte DV (slaan we over)
- 10.7 Lineaire DV van eerste orde (slaan we over)
- 10.8 Lineaire DV van eerste orde: alternatief

206

10.1 Inleiding

- ▶ Een differentiaalvergelijkingen (DV) is een verband tussen een functie en haar afgeleiden.
- ▶ Voorbeeld:

$$x'(t) = -\frac{x(t)}{t}$$

Dit is een verband tussen de functie $x(t)$ en haar afgeleide $x'(t)$.

Kortere notatie voor dezelfde DV: $x' = -\frac{x}{t}$

10.2 Oplossingen van een DV

► DV in impliciete vorm

$$F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

Bv: $x'' + 4x' - 2tx = 0$

► DV in expliciete vorm

$$x^{(n)}(t) = f(t, x, \dots, x^{(n-1)}).$$

Bv: $x'' = -4x' + 2tx$

- De **orde** van de DV is de orde van de hoogste afgeleide die voorkomt in de DV.
- **Oplossing:** een functie $x(t)$ die aan de DV voldoet
- Een DV oplossen:** alle oplossingen vinden

208

Voorbeeld 10.3.4

Eerste orde DV $x'(t) = -\frac{x(t)}{t}$

1. Algemene oplossing:

$$x(t) = \frac{C}{t}$$

met C constante

- **Linker Lid** $= x'(t) = -\frac{C}{t^2}$
- **Rechter Lid** $= -\frac{x(t)}{t} = -\frac{C}{t^2}$

2. $x' = -\frac{x}{t}$ met **beginvoorwaarde** $x(1) = 3$:
Unieke oplossing is

$$x(t) = \frac{3}{t}$$

omdat $3 = x(1) = C$

209

Voorbeeld 10.2.1

Eerste orde DV $x'(t) = -kx(t)$ met k constante

1. Algemene oplossing:

$$x(t) = Ce^{-kt}$$

met C constante

- ▶ Linker Lid = $x'(t) = -kCe^{-kt}$
- ▶ Rechter Lid = $-kx(t) = -kCe^{-kt}$

2. $x' = -kx$ met beginvoorwaarde $x(0) = 25$:

Unieke oplossing is

$$x(t) = 25e^{-kt}$$

omdat $25 = x(0) = C$

210

Voorbeeld 10.2.1: chemische reacties

- ▶ **Stof A gaat over in stof B:** $A \longrightarrow B$
- ▶ **Concentratie van A is $a(t)$**

$$a'(t) = -ra(t)$$

met $r > 0$ de reactieconstante.

- ▶ **Dit is een eerste orde reactie.**
- ▶ **Oplossingen van DV zijn**

$$a(t) = C e^{-rt}$$

met C constante.

- ▶ **Uit een beginvoorwaarde kunnen we C bepalen.**

Mechanische systemen

- Tweede wet van Newton

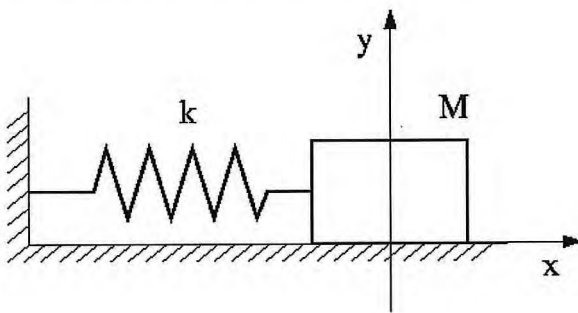
$$F = ma$$

- Positie $x(t)$
- Snelheid $v(t) = x'(t)$
- Versnelling $a(t) = x''(t)$
- Als kracht afhangt van de tijd, de positie en de snelheid, dan wordt $F = ma$ een DV van tweede orde

$$F(t, x, x') = mx''$$

212

Voorbeeld 10.2.2: Harmonische oscillator



Bron: Fisica Onde Musica

- Kracht is evenredig met uitwijking, maar tegengesteld gericht

$$F = -kx$$

- DV wordt

$$mx'' = -kx$$

213

Harmonische oscillator (vervolg)

- Schrijf $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Dan wordt de DV

$$x'' = -\omega^2 x$$

- Hieraan voldoen

$$x(t) = \cos \omega t, \quad x(t) = \sin \omega t$$

en ook de lineaire combinaties

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

- A en B volgen uit twee beginvoorwaarden

Bv, als $x(0) = x_0$ en $x'(0) = x_1$, dan $A = x_0$ en $B = \frac{x_1}{\omega}$

214

10.3 Eerste orde DV

- Beginwaardeprobleem: Vind oplossing van

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

- Stelling:

Neem aan dat $f(t, x)$ en $\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)$ bestaan en continu zijn voor

$$t \in [a, b], \quad x \in [c, d].$$

Als $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in [c, d]$ dan is er precies één oplossing van het beginwaardeprobleem.

- De oplossing is gedefinieerd op een mogelijk kleiner interval rond x_0

215

Voorbeeld 10.3.3

- **Beginwaardeprobleem: Vind oplossing van**

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$$

- **De functie**

$$x(t) = \tan t$$

is een oplossing van het beginwaardeprobleem:

- $\frac{d}{dt}(\tan t) = 1 + (\tan t)^2$
- $\tan 0 = 0$
- **Het is voldaan aan hypothesen van de stelling, met**

$$f(x, t) = 1 + x^2.$$

Stelling $\Rightarrow x(t) = \tan t$ is de unieke oplossing van het beginwaardeprobleem.

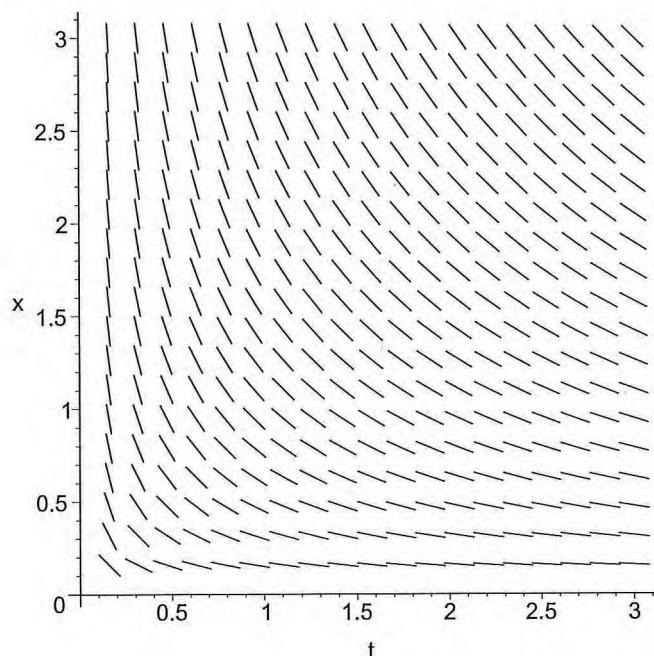
- **De oplossing is alleen gedefinieerd op $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.**

216

Oplossing in lijnelementenveld

- **Teken in elk punt van het (t, x) vlak een lijnelement met $f(t, x)$ als richtingscoëfficiënt.**

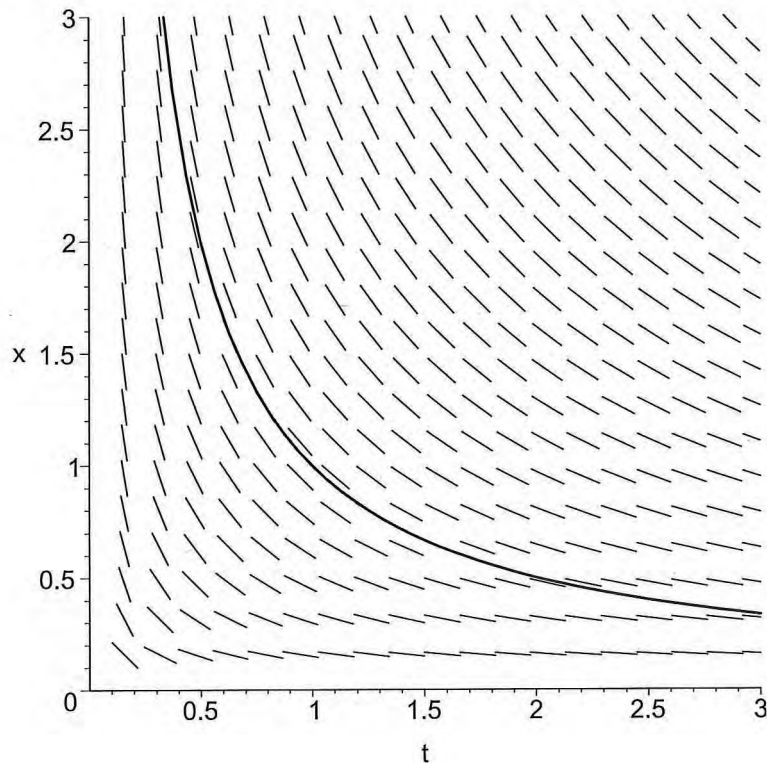
In voorbeeld: $f(t, x) = -\frac{x}{t}$.



217

Oplossing in lijnelementenveld (vervolg)

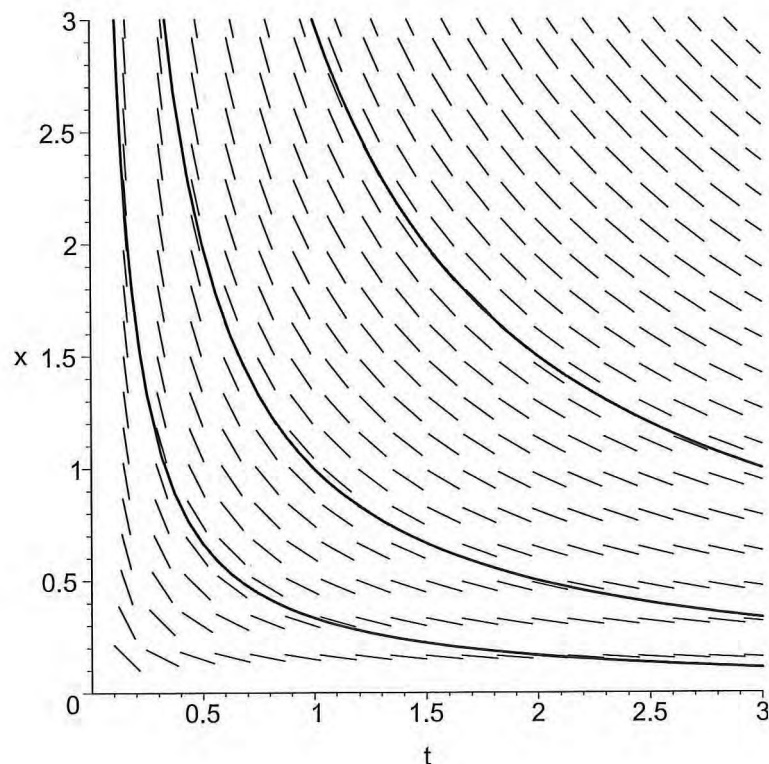
- De grafiek van een oplossing van $x' = f(t, x)$ moet in elk punt raken aan het lijnelement



218

Oplossingen snijden elkaar niet

- Door elk punt (t, x) gaat precies één oplossing. Verschillende oplossingen snijden elkaar niet.



219

Vraag

Q: Voor de DV

$$x'(t) = -x \cdot t$$

- 1) **teken enkele lijnelementen**
- 2) **vind alle oplossingen met $x(0) = 0$**
- 3) **als $x(t)$ een oplossing is met $x(0) = 1$, heeft $x(t)$ in $t = 0$ een lokale maximum, een lokale minimum, of geen van beide?**

Om deze vragen te beantwoorden, het is niet nodig om de DV op te lossen!

220

10.4 Scheidbare veranderlijken

- **Een DV met scheidbare veranderlijken is van de vorm**

$$x'(t) = f(x)g(t).$$

- A) Als x_0 een nulpunt is van f , dan is**

$$x(t) \equiv x_0$$

een constante oplossing.

Scheidbare veranderlijken (vervolg)

B) Als f niet nul wordt, dan kunnen we er door delen

$$\frac{1}{f(x(t))} x'(t) = g(t).$$

- Zij $F(x)$ een primitieve van $\frac{1}{f(x)}$.
Dan is vanwege de kettingregel

$$\frac{d}{dt} F(x(t)) = \frac{1}{f(x(t))} x'(t).$$

- Als $G(t)$ een primitieve is van $g(t)$, dan geldt dus

$$F(x(t)) = G(t) + C$$

- Soms kunnen we eruit de functie $x(t)$ bepalen

222

Rekenwijze voor $\frac{dx}{dt} = f(x)g(t)$

- Scheid de veranderlijken

$$\frac{1}{f(x)} dx = g(t) dt$$

- Integreer

$$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int g(t) dt$$

- Als $F(x)$ een primitieve is van $\frac{1}{f(x)}$ en $G(t)$ een primitieve is van $g(t)$, dan

$$F(x) = G(t) + C.$$

Dit is een impliciet verband tussen x en t .

223

Voorbeeld 1: $x' = -\frac{x}{t}$

- Schrijf de DV als

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) = x\left(\frac{-1}{t}\right)$$

- 0 nulpunt van $f(x)$, dus $x(t) = 0$ constante oplossing
- Scheid de veranderlijken

$$\frac{1}{x}dx = \frac{-1}{t}dt$$

- Integreer

$$\int \frac{1}{x}dx = - \int \frac{1}{t}dt$$

- We krijgen

$$\ln |x| = -\ln |t| + C_0$$

Impliciet verband tussen x en t .

224

Voorbeeld 1: $x' = -\frac{x}{t}$ (vervolg)

- We krijgen

$$\ln |x| = -\ln |t| + C_0$$

- We zoeken $x(t)$:

$$\ln |x| + \ln |t| = C_0 \Leftrightarrow$$

$$\ln |xt| = C_0 \Leftrightarrow$$

$$|xt| = e^{C_0} \Leftrightarrow$$

$$xt = \pm e^{C_0}$$

Stel $C = \pm e^{C_0}$, zodat C alle waarden kan aannemen behalve 0. Dan

$$x(t) = \frac{C}{t}$$

225

Voorbeeld 1: $x' = -\frac{x}{t}$ (vervolg)

We hebben dus

- ▶ $x(t) = 0$ constante oplossing
- ▶ $x(t) = \frac{C}{t}$, C kan alle waarden aannemen behalve 0

Expliciete algemene oplossing:

$$x(t) = \frac{C}{t}$$

met C een willekeurige constante

Q: Vind alle oplossingen van de DV

$$x'(t) = -x \cdot t$$

226

Voorbeeld 2: $x' = -\frac{\sin t}{x}$

- ▶ Schrijf de DV als

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t) = \frac{1}{x}(-\sin t)$$

- ▶ Er zijn geen constante oplossingen, omdat $f(x)$ geen nulpunten heeft
- ▶ Scheid de veranderlijken

$$x \, dx = -\sin t \, dt$$

- ▶ Integreer $\int x \, dx = -\int \sin t \, dt$

- ▶ Bereken de integralen

$$\frac{1}{2}x^2 = \cos t + C$$

227

Voorbeeld 2: $x' = -\frac{\sin t}{x}$ (vervolg)

►

$$\frac{1}{2}x^2 = \cos t + C$$

► **Expliciete vorm**

$$x(t) = \pm \sqrt{2(\cos t + C)}$$

► **Teken en C worden bepaald door beginvoorwaarde:**

$$x_0 = x(0) = \pm \sqrt{2(1 + C)} \quad \text{met } x_0 \neq 0$$

► **Teken:**

- $x_0 > 0$: **plusteken**
- $x_0 < 0$: **minteken**

►

$$C = -1 + \frac{1}{2}x_0^2$$

C kan alle waarden > -1 aannemen

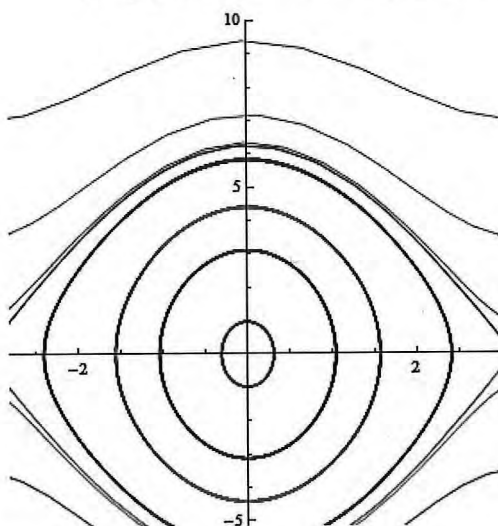
228

Voorbeeld 2: $x' = -\frac{\sin t}{x}$ (vervolg)

► **Oplossingen:**

$$x = \pm \sqrt{2(\cos t + C)} \quad \text{met } C > -1$$

► **Verskillend gedrag van oplossingen naar gelang**
 $C \geq 1$ of $-1 < C < 1$



$C \geq 1$:

oplossing bestaat voor alle t

$-1 < C < 1$:

oplossing bestaat alleen als

$$\cos t \geq -C$$

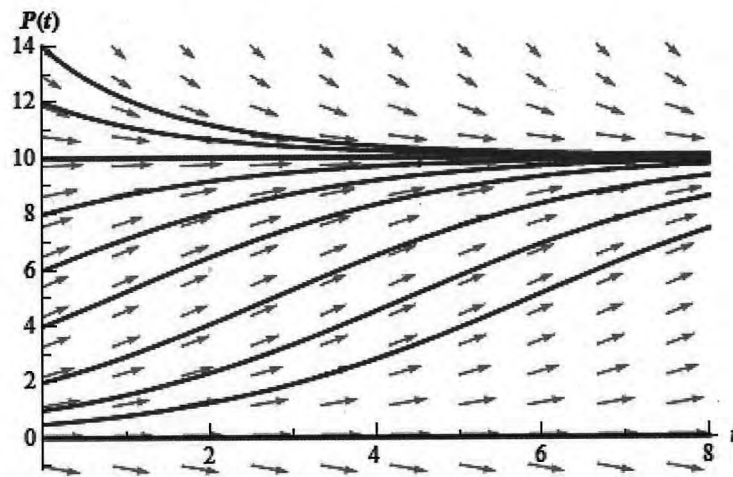
Bron: *physique.unice.fr*

229

10.5 Logistiek model

- $P(t)$ is **populatiegrootte**, en $M, k > 0$ constanten. De groeisnelheid neemt af als P de waarde M benadert

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P).$$



Lijnelementenveld ($M = 10$) met enkele oplossingen

230

Oplossing logistieke groei $\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$

- **Constante oplossingen** $P(t) \equiv 0$ en $P(t) \equiv M$
- **Andere oplossingen berekenen we door de veranderlijken te scheiden (stel $x = P$)**

$$\frac{1}{x(M - x)} dx = k dt$$

- **Integreer**

$$\int \frac{1}{x(M - x)} dx = \int k dt = kt + C$$

Oplossing logistieke groei (vervolg)

- Voor linkerlid: **Splitsing in partieelbreuken**

$$\frac{1}{x(M-x)} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{M-x} \right)$$

- Primitieve van $\frac{1}{x(M-x)}$ is

$$\frac{1}{M} [\ln|x| - \ln|M-x|] = \frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M-x} \right|$$

- Dus

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M-x} \right| = kt + C$$

232

Oplossing logistieke groei (vervolg)

$$\frac{1}{M} \ln \left| \frac{x}{M-x} \right| = kt + C$$

- Dit is een **impliciet verband** tussen x en t .
We kunnen hieruit x **oplossen**.
- **Vermenigvuldig met M en neem e -macht**

$$\left| \frac{x}{M-x} \right| = e^{M(kt+C)} = e^{MC} e^{Mkt}$$

- Dus

$$\frac{x}{M-x} = \pm e^{MC} e^{Mkt} = C_1 e^{Mkt}$$

met $C_1 \neq 0$

233

Oplossing logistieke groei (vervolg)

- Vermenigvuldig met $M - x$ en breng termen met x naar linkerkant

$$x(t) = \frac{MC_1 e^{Mkt}}{1 + C_1 e^{Mkt}}.$$

- Dit kan ook geschreven worden als (deel teller en noemer door $C_1 e^{Mkt}$):

$$x(t) = \frac{M}{1 + C_2 e^{-Mkt}}$$

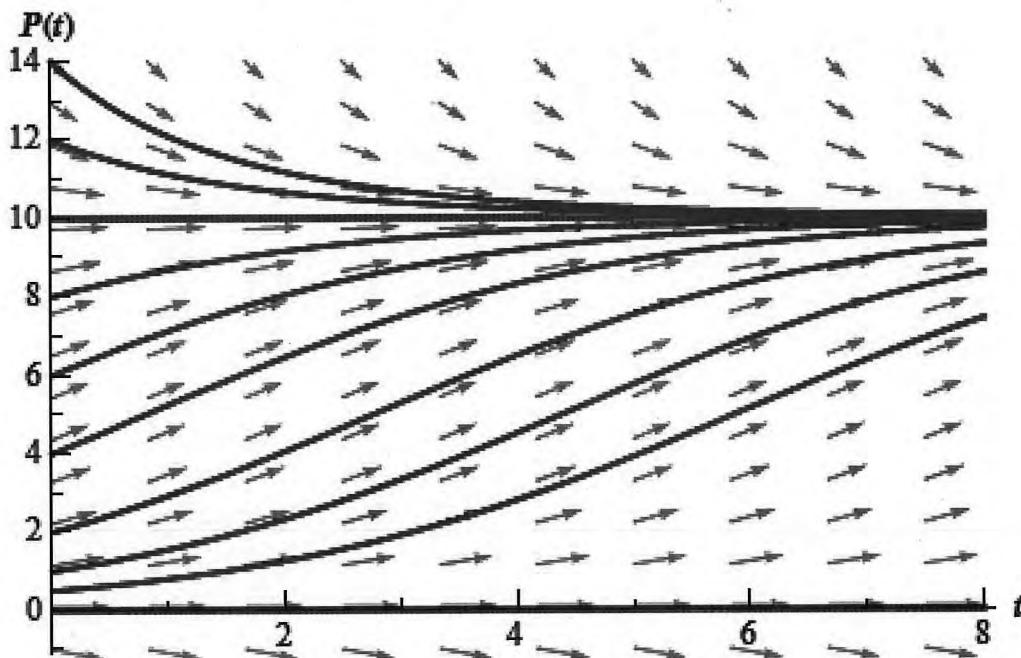
met $C_2 = \frac{1}{C_1}$.

234

Oplossing logistiek model

Oplossingen: $P(t) \equiv 0$ en

$$P(t) = \frac{M}{1 + C_2 e^{-Mkt}} \quad \text{met } C_2 \in \mathbb{R}$$



235

10.6 Exacte DV

Slaan we over

236

10.7 Eerste orde lineaire DV

Slaan we over

237

10.8 Eerste orde lineaire DV

- Een eerste orde lineaire DV heeft de vorm

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

Vb: $x' - tx = -t$

- De DV heet homogeen als $q(t) = 0$

Vb: $x' - tx = 0$

238

Oplossen homogene eerste orde lineaire DV

Los de homogene DV $x'(t) + p(t)x(t) = 0$ op met scheiden van veranderlijken:

$$\frac{dx}{dt} = -p(t)x(t)$$

- $x(t) = 0$ is constante oplossing

►

$$\int \frac{1}{x} dx = - \int p(t) dt$$

$$\ln|x| = -P(t) + C_0 \quad \text{met } P(t) \text{ primitieve van } p(t)$$

$$|x| = e^{C_0} e^{-P(t)}$$

$$x = \pm e^{C_0} e^{-P(t)} = C e^{-P(t)} \quad \text{met } C \neq 0$$

Algemene oplossing:

$$x(t) = C e^{-P(t)} \quad \text{met } C \text{ willekeurig}$$

239

Voorbeeld: $x' - tx = 0$

Met scheiden van veranderlijken:

$$\frac{dx}{dt} = tx$$

► $x(t) = 0$ is constante oplossing

►

$$\int \frac{1}{x} dx = \int t dt$$

$$\ln|x| = \frac{t^2}{2} + C_0$$

$$|x| = e^{C_0} e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$x = \pm e^{C_0} e^{\frac{t^2}{2}} = C e^{\frac{t^2}{2}} \quad \text{met } C \neq 0$$

Algemene oplossing:

$$x(t) = C e^{\frac{t^2}{2}} \quad \text{met } C \text{ willekeurig}$$

240

Variatie van constanten

We gebruiken variatie van constanten voor niet-homogene eerste orde lineaire DV:

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

Strategie:

► Algemene oplossing homogene DV is

$$x(t) = C e^{-P(t)}$$

met $P(t)$ primitieve van $p(t)$

► Maak van C functie $y(t)$

$$x(t) = y(t) e^{-P(t)}$$

► Zoek $y(t)$ zodat $x(t)$ oplossing is van niet-homogene DV.

241

Variatie van constanten (vervolg)

Zoek $y(t)$ zodat

$$x(t) = y(t)e^{-P(t)}$$

oplossing is van

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t).$$

► Neem de afgeleide van $x(t)$

$$\begin{aligned} x'(t) &= y'(t)e^{-P(t)} + \underbrace{y(t)e^{-P(t)}}_{=x(t)} \underbrace{(-P'(t))}_{=-p(t)} \\ &= -p(t)x(t) + y'(t)e^{-P(t)} \end{aligned}$$

► Dus $x(t)$ is oplossing als

$$y'(t)e^{-P(t)} = q(t)$$

242

Variatie van constanten (vervolg)

► Zoek oplossing $y(t)$ van

$$y'(t)e^{-P(t)} = q(t)$$

► Omdat

$$y'(t) = q(t)e^{P(t)}$$

krijgen we

$$y(t) = \int q(t)e^{P(t)} + C$$

Conclusie:

de algemene oplossing van $x'(t) + p(t)x(t) = q(t)$ is

$$x(t) = \left(\int q(t)e^{P(t)} + C \right) e^{-P(t)}$$

243

Voorbeeld variatie van constanten

$$x' - tx = -t$$

- **Algemene oplossing van homogene DV:**

$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

- **Variatie van constanten: stel**

$$x(t) = y(t)e^{\frac{t^2}{2}}$$

- **Neem de afgeleide**

$$\begin{aligned}x'(t) &= y'(t)e^{\frac{t^2}{2}} + y(t)e^{\frac{t^2}{2}}t \\ &= t \cdot x(t) + y'(t)e^{\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

- **Dus $x(t)$ is oplossing als**

$$y'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = -t$$

244

Voorbeeld variatie van constanten (vervolg)

Vind oplossing $y(t)$ van

$$y'(t)e^{\frac{t^2}{2}} = -t$$

- **We hebben**

$$\begin{aligned}y'(t) &= -te^{-\frac{t^2}{2}} \\ y(t) &= -\int te^{-\frac{t^2}{2}} dt\end{aligned}$$

- **Substitutieregel: stel $u = -\frac{t^2}{2}$, $du = -tdt$**

$$y(t) = \int e^u du = e^u + C = e^{-\frac{t^2}{2}} + C$$

245

Voorbeeld variatie van constanten (vervolg)

► **Conclusie:**

De algemene oplossing van $x'(t) - tx(t) = -t$ is

$$x(t) = (e^{-\frac{t^2}{2}} + C)e^{\frac{t^2}{2}} = Ce^{\frac{t^2}{2}} + 1$$

► **Met beginwaarde $x(1) = 2$:**

$2 = x(1) = Ce^{\frac{1}{2}} + 1$, dus

$$C = e^{-\frac{1}{2}}$$

Unieke oplossing:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{t^2}{2}} + 1 = e^{\frac{1}{2}(t^2-1)} + 1$$

Q: Vind alle oplossingen van

$$x' + tx = e^t e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 11

1. [§11.3] Los op

$$x'' - 2x' + 2x = 0$$

Uitleg: We proberen oplossingen van de vorm

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

te vinden, waar $\lambda \in \mathbb{R}$ nog te bepalen is. Invullen in de DV geeft $(\lambda^2 - 2\lambda + 2)e^{\lambda t} = 0$, wat betekent dat

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

We hebben dus twee *complex*e oplossingen

$$x_{\pm} = e^{(1 \pm i)t} = e^t \cdot e^{\pm it} = e^t (\cos t \pm i \sin t).$$

Daaruit krijgen we twee lineair onafhankelijke *reële* oplossingen

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{2}(x_+ + x_-) = e^t \cos t \\ x_2(t) &= \frac{1}{2i}(x_+ - x_-) = e^t \sin t. \end{aligned}$$

De algemene oplossing van de DV is dus, voor constanten c_1 en c_2 ,

$$c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t.$$

2. [§11.4] Geef aan de algemene oplossing van

$$x'' - 2x' + 2x = 2t.$$

Uitleg: Volgende week.

28/11/2019 Wisk - hoo college

* 11.4

$$x'' + ax' + bx = 0$$

probeer $x(t) = e^{\lambda t}$

* Q. $x'' - 2x' + 2x = 2t$

probeer $x(t) = A_0 + A_1 t$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad 0 \quad -2A_1 + 2(A_0 + A_1 t) &= 2t \\ -2A_1 + 2A_0 + 2A_1 t &= 2t \\ (A_1 - 1)t &= A_1 - A_0 \end{aligned}$$

$$LL = RL \quad \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_0 = A_1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ~~then~~ $x = 1 + t$ is een op. (particuliere op.)

op. v. $x'' - 2x' + 2x = 0$ is $C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t)$

$\Rightarrow (1+t) + C_1 e^t \cos(t) + C_2 e^t \sin(t)$

$\hookrightarrow$ algemene oplossing

Hier: $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$

* Q: $f(x, y) = x \cdot y$

$\text{grad } f = (y, x) \rightarrow$ dus stad ptn $(0, 0)$

$\lambda = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$

11. Lineaire DV van tweede orde

Inhoud

- 11.1 Inleiding
- 11.2 Homogene lineaire DV
- 11.3 Constante coëfficiënten
- 11.4 Niet homogene lineaire DV
- 11.5 Toepassing: gedwongen trillingen en resonantie

247

11.1 Lineaire DV

- Tweede orde DV is lineair als ze de vorm

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = r(t)$$

heeft, waarin $p(t)$, $q(t)$ en $r(t)$ gegeven zijn.

- We gaan alleen deze tweeden orde DV bestuderen
- Als $r(t) \equiv 0$ dan is de DV homogeen.
Anders, niet homogeen.

248

11.2 Homogene lineaire DV

► **Superpositiebeginsel:**

Als $x_1(t)$ en $x_2(t)$ twee oplossingen zijn van

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

dan is

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

ook een oplossing, voor alle constanten c_1 en c_2 .

249

Voorbeeld

$$x'' - 5x' + 6x = 0$$

► **Deze DV heeft oplossingen**

$$x_1(t) = e^{2t} \quad \text{en} \quad x_2(t) = e^{3t}$$

► **Voor elke c_1 en c_2 is**

$$x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{3t}$$

ook een oplossing.

c_1 en c_2 kunnen we bepalen uit twee beginvoorwaarden.

Lineair (on)afhankelijke functies

- **Functies $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ zijn lineair afhankelijk als er getallen $c_1, c_2, \dots, c_n$ zijn met**

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) = 0 \quad \text{voor alle } t$$

en niet alle $c_1, c_2, \dots, c_n$ gelijk aan nul.

- **Anders: lineair onafhankelijk.**

Strategie voor homogene lineaire DV van tweede orde:

- **Zoek twee lineair onafhankelijke oplossingen $x_1(t)$ en $x_2(t)$.**
- **Algemene oplossing is dan**

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$$

251

11.3 Constante coëfficiënten

Homogene DV met constante coëfficiënten

$$x'' + ax' + bx = 0$$

- **Probeer $x(t) = e^{\lambda t}$**
- **Dan $x' = \lambda e^{\lambda t}$, $x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$ en**

$$x'' + ax' + bx = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t}$$

- **$e^{\lambda t}$ voldoet aan DV als en slechts als**

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

252

Karakteristieke vergelijking

► Oplossingen van karakteristieke vergelijking

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

zijn

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

► Drie gevallen, afhankelijk van $D = a^2 - 4b$:

- 1) $D > 0$,
- 2) $D = 0$,
- 3) $D < 0$,

253

1) $D > 0$: nulpunten reëel en verschillend

► Als $D > 0$ dan zijn

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

reëel en onderling verschillend.

► Twee reële oplossingen (lineair onafhankelijk)

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

► Algemene oplossing is

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

254

Voorbeeld

Homogene lineaire DV

$$x'' + x' - 6x = 0$$

► **Probeer** $x(t) = e^{\lambda t}$

► **Dan**

$$x'' + x' - 6x = (\lambda^2 + \lambda - 6)e^{\lambda t}$$

► **dat is null** $\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ of } \lambda = 2$$

► **Twee reële oplossingen (lineair onafhankelijk)**

$$x_1(t) = e^{-3t}, \quad x_2(t) = e^{2t}$$

► **Algemene oplossing is**

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$$

255

2) $D = 0$: samenvallende nulpunten

► **Als $D = 0$ dan**

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2}$$

► **We vinden één oplossing**

$$x_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda = -a/2$$

► **Zoek tweede lineair onafhankelijke oplossing**

$$x(t) = v(t)x_1(t)$$

256

$D = 0$ (vervolg)

► Tweede oplossing is

$$x_2(t) = te^{\lambda t}, \quad \lambda = -a/2$$

► Algemene oplossing in geval $D = 0$ is

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

met $\lambda = -a/2$.

257

3) $D < 0$: nulpunten zijn niet-reëel

► Nulpunten zijn complex toegevoegd

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{4b - a^2} \\ &= \mu \pm i\omega, \end{aligned}$$

waarin

$$\mu = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2}$$

► Complexe oplossingen

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{\mu t + i\omega t} = e^{\mu t} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ e^{\lambda_2 t} &= e^{\mu t - i\omega t} = e^{\mu t} (\cos \omega t - i \sin \omega t) \end{aligned}$$

258

$D < 0$ (vervolg)

- Neem som en verschil van de complexe oplossingen

$$\frac{1}{2} (e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}) = e^{\mu t} \cos \omega t$$
$$\frac{1}{2i} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) = e^{\mu t} \sin \omega t$$

Dit zijn lineair onafhankelijke reële oplossingen.

- Algemene oplossing is

$$x(t) = e^{\mu t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

- Andere schrijfwijze, voor zekere constanten A en ψ :

$$x(t) = A e^{\mu t} \cos(\omega t + \psi)$$

Q: Los op

$$x'' - 2x' + 2x = 0$$

259

11.4 Niet-homogene lineaire DV

- Niet-homogene lineaire DV met constante coëfficiënten

$$x'' + ax' + bx = r(t)$$

Strategie:

- Los eerst de bijbehorende homogene DV op

$$x'' + ax' + bx = 0$$

- Zoek nog particuliere oplossing $x_P(t)$

260

Oplossing

Eigenschap:

De algemene oplossing van

$$x'' + ax' + bx = r(t)$$

is gelijk aan

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t)$$

waarin



$$x_P(t)$$

is een particuliere oplossing



$$x_H(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

is de algemene oplossing van de homogene DV.

261

Methode van onbepaalde coëfficiënten

- **Om een particuliere oplossing te vinden:**
afhankelijk van de vorm van het rechterlid $r(t)$,
probeer met $x(t)$ als in de volgende tabel
- **Dat werkt niet altijd**

Q: Geef aan de algemene oplossing van

$$x'' - 2x' + 2x = 2t.$$

*Om een particuliere oplossing van de DV te vinden,
probeer $x(t) = A_0 + A_1 t$.*

262

Methode van onbepaalde coëfficiënten: tabel

term in $r(t)$	Probeer voor $x(t)$
veelterm van graad n	$A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n$
$c e^{at}$	$A e^{at}$
(veelterm van graad n) $\cdot e^{at}$	$(A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n) \cdot e^{at}$
$c \cos \omega t$ of $c \sin \omega t$	$A \cos \omega t + B \sin \omega t$
$c e^{\mu t} \cos \omega t$ of $c e^{\mu t} \sin \omega t$	$e^{\mu t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

263

11.5 Toepassing: trillingen en resonantie

- **Gedwongen trillingen in mechanische en elektrische systemen**

$$mx'' + cx' + kx = A_0 \cos \omega t$$

- **Is de bewegingsvergelijking $F_{tot} = ma$ met krachten**

$-kx$: kracht vanwege uitwijking x

$-cx'$: dempingsterm (bv. wrijving)

$A_0 \cos \omega t$: uitwendige kracht

Harmonische oscillator

**Speciaal geval: zonder damping
(de harmonische oscillator)**

De DV wordt

$$x'' + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

waar $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

► **Oplossingen van de homogene DV**

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

zijn

$$x_H(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

**Harmonische oscillaties met frequentie ω_0
(natuurlijke frequentie).**

265

Harmonische oscillator (vervolg)

$$x'' + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t$$

► **Probeer voor een particuliere oplossing:**

$$x(t) = x_P(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

► **Na enig rekenwerk** $A = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ **en** $B = 0$

► **De DV heeft dus particuliere oplossing**

$$x_P(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

► **Particuliere oplossing is niet geldig als $\omega = \omega_0$.**

266

Geval $\omega = \omega_0$ (resonantie)

- Als $\omega = \omega_0$: voor de particuliere oplossing van

$$x'' + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega_0 t$$

proberen we

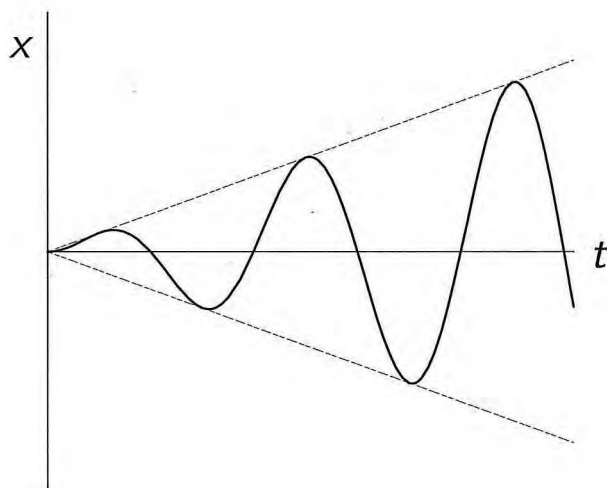
$$x(t) = x_P(t) = t (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)$$

- Weer na enig rekenwerk blijkt $A = 0$ en $B = \frac{A_0}{2\omega_0}$
- Particuliere oplossing

$$x_P(t) = \frac{A_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

267

Particuliere oplossing $\frac{A_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$



- Vanwege de extra factor t neemt de amplitude van de oscillaties toe.

268

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 12

1. [§12.4] Classificeer de stationaire punten van $f(x, y) = xy$

Uitleg: De stationaire punten zijn de punten waar de partiële afgeleiden nul zijn. Uit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

zien we dat het unieke stationaire punt $(0, 0)$ is.

We willen nu het criterium van de tweede afgeleide toepassen. We berekenen

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} x = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

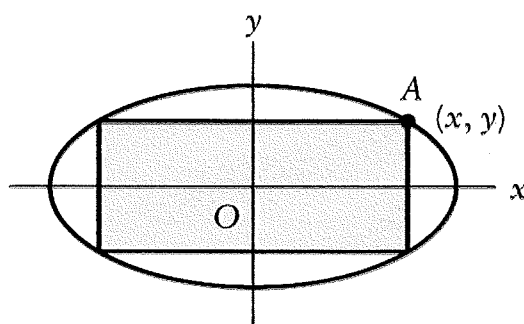
De Hessiaan van f (de matrix van tweede partiële afgeleiden) is dus

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

We hebben $\Delta = \det(H) = -1 < 0$. Uit het criterium van de tweede afgeleide volgt dat $(0, 0)$ een zadelpunt is.

2. [§12.6] Vind de rechthoek met de grootste oppervlakte die symmetrisch geplaatst kan worden als op de tekening, binnen de ellips

$$x^2 + 4y^2 = 1$$



Uitleg: Voor elke rechthoek die geplaatst kan worden als op de tekening, noteren we met (x, y) de coördinaten van het hoekpunt boven rechts (zie tekening). De oppervlakte van zo een rechthoek is $2x \cdot 2y = 4xy$. Dus is de taak: *vind waar het maximum bereikt wordt van de functie*

$$f(x, y) = 4xy,$$

waar $x > 0$ en $y > 0$, onder de nevenvoorwaarde $x^2 + 4y^2 = 1$.

We passen de Lagrange techniek toe. We moeten dus dit stelsel vergelijkingen oplossen:

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 1 \\ 4y &= \lambda \cdot 2x \\ 4x &= \lambda \cdot 8y. \end{aligned}$$

(We zijn alleen aan x en y geïnteresseerd, niet in λ .)

De tweede vergelijking kan geschreven worden als $\frac{2y}{x} = \lambda$, en de derde als $\frac{x}{2y} = \lambda$.
Daaruit volgt (zelfs als we λ niet kennen!)

$$\frac{2y}{x} = \frac{x}{2y} \implies 4y^2 = x^2 \implies x = 2y.$$

We vullen in in de eerste vergelijking:

$$(2y)^2 + 4y^2 = 1 \implies 8y^2 = 1 \implies y = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Daaruit volgt $x = 2y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dus is

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

het enige stationair punt van $f(x, y)$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + 4y^2 = 1$.

In dat punt hebben we een maximum, omdat, als (x, y) aan de nevenvoorwaarde voldoet, wordt $f(x, y) = 4xy$ willekeurig klein als we x dicht genoeg bij nul of bij 1 kiezen.

Opmerkingen in de les Hoofdstuk 13

1. [§13.3]

- i) Voor $\vec{a} = (3, 4, 0)$ bereken $|\vec{a}|$
- ii) Voor $P : (1, 2, 3)$ en $Q : (2, 4, 5)$ bereken $\vec{b} = \overrightarrow{PQ}$ en $|\vec{b}|$
- iii) Bereken het scalair product $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- iv) Bereken de hoek $\theta \in [0, \pi]$ tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$

Uitleg:

- i) The lengte van $\vec{a}$ is

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = 5.$$

- ii) Eerste berekenen we de vector $\vec{b}$:

$$\vec{b} = (2 - 1, 4 - 2, 5 - 3) = (1, 2, 2).$$

Nu kunnen we de lengte van deze vector berekenen:

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

- iii) Het scalair product is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 3 + 8 + 0 = 11.$$

- iv) Volgens de cosinusregel is

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta,$$

waar θ de hoek tussen $\vec{a}$ en $\vec{b}$ is. Dus in dit geval is

$$11 = 5 \cdot 3 \cdot \cos \theta.$$

Dat betekent dat $\cos \theta = \frac{11}{15}$ en $\theta = \arccos(\frac{11}{15})$.

Ansatz:

$$u = \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+2}} \sin(\lambda x)$$

$$R.L. = (-1)^{n+1} \lambda^{2n+2} \sin(\lambda x)$$

$$= (-1)^n (-1) \lambda^{2n} \lambda^2 \sin(\lambda x)$$

$$= \frac{(-1)^n \lambda^{2n} \sin(\lambda x)}{\lambda^{2n}} \cdot \lambda^2$$

$$= \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin(\lambda x) \cdot \lambda^2$$

b) Zeigend, dass die Ableitung einer Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ergibt, zeigt, dass $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin(\lambda x) = (-1)^n \lambda^{2n} \sin(\lambda x)$ gilt. Also gilt die Behauptung für $n=0$, also die Behauptung ist bewiesen.

$$d) f_1(x) = \frac{1}{6} + f(x) \cdot x = \frac{f(x)}{6} \cdot x^6 + \frac{f'(x)}{6} \cdot x^5 + \frac{f''(x)}{6} \cdot x^4 + \frac{f'''(x)}{6} \cdot x^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{6} \cdot x^2 + \frac{f^{(5)}(x)}{6} \cdot x + \frac{f^{(6)}(x)}{6}$$

$$\cdot f^{(6)}(x) \cdot \lambda \cos(\lambda x) \approx f^{(6)}(x) = \lambda$$

$$\cdot f^{(5)}(x) = -\lambda^2 \sin(\lambda x) \approx f^{(5)}(x) = 0$$

$$\cdot f^{(4)}(x) = \lambda^3 \cos(\lambda x) \approx f^{(4)}(x) = -\lambda^3$$

$$\cdot f^{(3)}(x) = -\lambda^4 \sin(\lambda x) \approx f^{(3)}(x) = 0$$

$$\cdot f^{(2)}(x) = \lambda^5 \cos(\lambda x) \approx f^{(2)}(x) = \lambda^5$$

$$\cdot f^{(1)}(x) = -\lambda^6 \sin(\lambda x) \approx f^{(1)}(x) = 0$$

$$\cdot f^{(0)}(x) = -\lambda^7 \cos(\lambda x) \approx f^{(0)}(x) = -\lambda^7$$

$$\Rightarrow f_1(x) = \lambda x - \frac{\lambda^3}{6} x^3 + \frac{\lambda^5}{120} x^5 - \frac{\lambda^7}{5040} x^7$$

↳ spielen in Kleingruppen

2012-2013

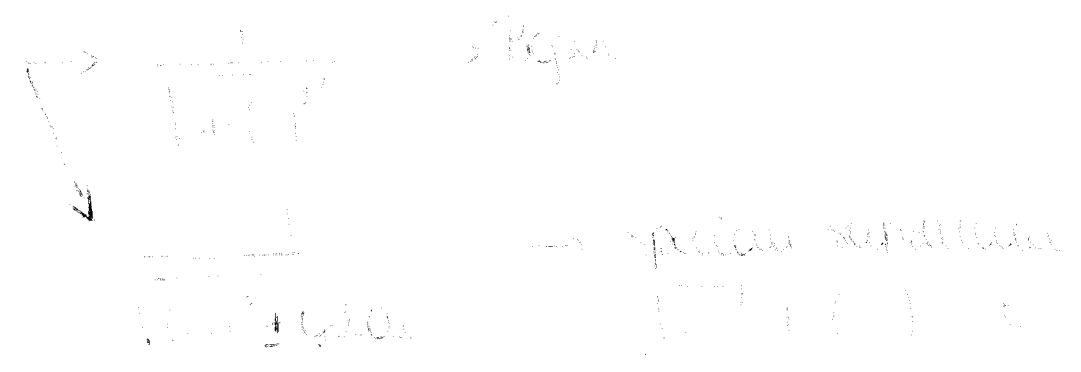
1000

2. Species 2.1

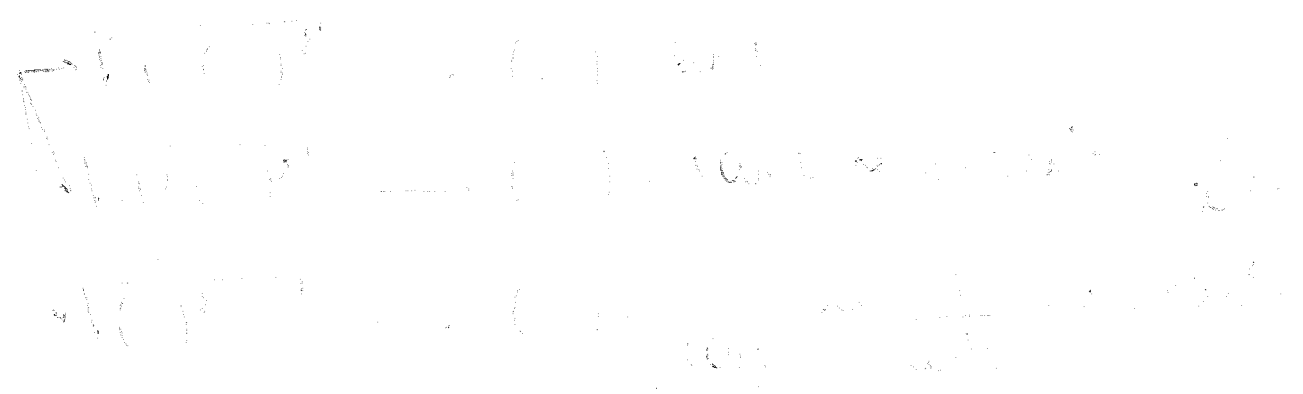
1. Nomenclature → species is binominal

2. Species are divisible → subspecies → varieties → populations

3. Species → one form → one name



4. Species → one form → one name → one name



elementele integrale

KBC

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

Definirea integralului

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\textcircled{+} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \sin^2 x} \Rightarrow \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) = \frac{1}{1 - \sin^2 x}$$

$$\textcircled{+} \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Leiden

KBC

सिद्ध करें

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$$

$$\csc^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

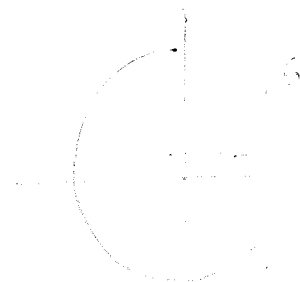
$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}, 1$$

$$\cot \alpha = \sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$

711 अंक ✓

841 अंक ✓

1211 अंक ✓



1. $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$
 $\frac{d}{dx} x^{-2} = -2x^{-3}$
 $= -\frac{2}{x^3}$

2. $\frac{d}{dx} \ln(x)$
 $= \frac{1}{x}$
 $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

3. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

4. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

5. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

6. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

7. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

8. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

9. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

10. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

11. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

12. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

13. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

14. $\frac{d}{dx} \ln(x^2)$
 $= \frac{1}{x^2} \cdot 2x$
 $= \frac{2}{x}$

1. $y'' + y' + y = 0$

2. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

3. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

4. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

5. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

6. $y'' + y' + y = 0$

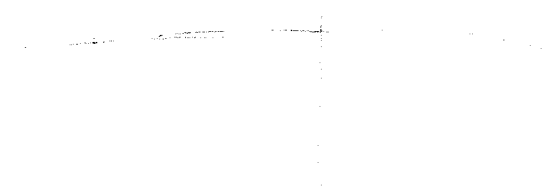
7. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

8. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

9. $y'' + y' + y = 0$
 $y'' + y' + y = 0$

10. $y'' + y' + y = 0$

11. $y'' + y' + y = 0$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$