Oplossingen Oefeningen Bewijzen en Redeneren

Goeroen Maaruf

20 augustus 2012

1 Hoofdstuk 3: Relaties

1.1 Oefening 3.1.2

(a)
Persoon p is grootouder van persoon q.

(b)

$$\begin{aligned}&(p,q) \in O^{-1}\ o\ O\\ &\Leftrightarrow \exists r \in P : \left[(p,r) \in O \wedge (r,q) \in O^{-1}\right]\\ &\Leftrightarrow \exists r \in P : [(p,r),(q,r) \in O]\end{aligned}$$

(p,q) hoort enkel tot de relatie $O^{-1}\ o\ O$ als en slechts als p en q beide ouder zijn van eenzelfde persoon r.

(d)(p,q) ∈ O o Z

$$\Leftrightarrow \exists r \in P : [(p,r) \in Z \wedge (r,q) \in O]$$

p en q behoren tot de relatie O o Z als en slechts als p de zus is van de vader of moeder van q.

(f)
(p,q) ∈ $(Z\ o\ O^{-1})^{-1}\ o\ Z$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \exists r \in P : \left[(p,r) \in Z \wedge (r,q) \in (Z\ o\ O^{-1})^{-1}\right]\\ &\Leftrightarrow \exists r \in P : \left[(p,r) \in Z \wedge (q,r) \in (Z\ o\ O^{-1})\right]\\ &\Leftrightarrow \exists r,s \in P : [(p,r) \in Z \wedge (s,q) \in O \wedge (s,r) \in Z]\end{aligned}$$

Hier zijn er twee mogelijkheden.
Mogelijkheid 1: $p \neq s$: Een koppel $(p,q) \in P^2$ behoort tot de relatie $(Z\,o\,O^{-1})^{-1}\ o\ Z$ als en slechts als p de zus is van de moeder van q en q's moeder en p hebben

nog een broer of zus.
Mogelijkheid 2: $p = s$: Een koppel $(p, q) \in P^2$ behoort tot de relatie $((Z\, o\, O^{-1})^{-1}\, o\, Z$ als en slechts als p de moeder is van q en een broer of zus heeft.

1.2 Oefening 3.1.3

(b)(p,s) $\in$ R^{-1} o S^{-1}

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists r \in C : \left[(s, r) \in S^{-1} \wedge (r, p) \in R\right] \\ &\Leftrightarrow \exists r \in C : [(p, r) \in R \wedge (r, s) \in S] \end{aligned}$$

Het koppel (p,s) behoort tot de relatie R^{-1} o S^{-1} als en slechts als student s een vak r krijgt van professor p.
Noot: Hier zie je al dat R^{-1} o S^{-1} = (S o R)$^{-1}$, iets wat je later nog moet bewijzen.

(c)(r,s) $\in$ R^{-1} o S^{-1} o S o R

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \exists t \in C : \left[(r, t) \in R \wedge (t, s) \in R^{-1} o S^{-1} o S\right] \\ &\Leftrightarrow \exists t, u, v \in C : \left[(r, t) \in R \wedge (t, u) \in S \wedge (u, v) \in S^{-1} \wedge (v, s) \in R^{-1}\right] \\ &\Leftrightarrow \exists t, u, v \in C : [(r, t), (s, v) \in R \wedge (t, u), (v, u) \in S] \end{aligned}$$

Een koppel studenten (r,s) $\in A^2$ behoort tot de relatie R^{-1} o S^{-1} o S o R als en slechts als r en s beiden les krijgen van dezelfde professor. (Niet per se voor hetzelfde vak).

1.3 Oefening 3.1.5

R is een relatie van X op zichzelf met R^{-1} $\subset$ R. We moeten bewijzen dat R $\subset$ R^{-1}.

Bewijs. Kies een koppel (x,y) $\in$ X met (x,y) $\in$ R willekeurig. We bewijzen dat (x,y) $\in$ R^{-1}. Omdat (x,y) $\in$ R geldt dat (y,x) $\in$ R^{-1}. Aangezien R^{-1} $\subset$ R volgt dat (y,x) $\in$ R. Volgens de definitie van inverse relatie impliceert dit laatste dat (x,y) $\in$ R^{-1}, wat we moesten bewijzen. $\square$

1.4 Oefening 3.1.7

We moeten bewijzen dat (S o R)$^{-1}$ = R^{-1} o S^{-1}.

Bewijs. Eerst bewijzen we (S o R)$^{-1}$ $\subset$ R^{-1} o S^{-1}.
Neem een koppel (z,x) $\in$ (S o R)$^{-1}$ willekeurig. Dan is er een y $\in$ Y met (x,y)

$\in$ R en (y,z) $\in$ S. Dus is (y,x) $\in$ R^{-1} en (z,y) $\in$ S^{-1} en volgens de definitie van samenstelling van relaties is (z,x) $\in$ R^{-1} o S^{-1}. Dus is $(S \text{ o } R)^{-1} \subset R^{-1}$ o S^{-1} omdat het koppel (z,x) $\in$ $(S \text{ o } R)^{-1}$ willekeurig gekozen was.
Neem nu een koppel (z,x) $\in$ R^{-1} o S^{-1} willekeurig. Dan is er een y $\in$ Y met (z,y) $\in$ S^{-1} en (y,x) $\in$ R^{-1}. Dan is (x,y) $\in$ R en (y,z) $\in$ S en is volgens de definitie van samenstelling van relaties (x,z) $\in$ S o R. Dan volgt uit de definitie van inverse relatie dat (z,x) $\in$ $(S \text{ o } R)^{-1}$ en omdat het koppel (z,x) willekeurig gekozen was is dus R^{-1} o $S^{-1} \subset (S \text{ o } R)^{-1}$.
Omdat beide inclusies gelden volgt dat $(S \text{ o } R)^{-1} = R^{-1}$ o S^{-1}, wat we wilden bewijzen. $\square$

1.5 Oefening 3.2.3

(c) R is transitief $\Leftrightarrow$ R o R $\subset$ R.

Bewijs. $\Rightarrow$ Neem aan dat R transitief is. Volgens de definitie van transitiviteit geldt voor twee koppels (a,b) en (b,c) $\in X^2$ dat als (a,b) $\in$ R en (b,c) $\in$ R, dat (a,c) $\in$ R. Omdat R transitief is bestaan zo'n koppels sowieso. Bovendien volgt omdat (a,b) $\in$ R en (b,c) $\in$ R uit de definitie van samenstelling van relaties dat (a,c) $\in$ R o R, maar (a,c) was ook $\in$ R, dus is R o R $\subset$ R.
$\Leftarrow$ Neem nu aan dat R o R $\subset$ R.
Kies a,c $\in$ X met (a,c) $\in$ R o R willekeurig. Dan is er een b $\in$ X met (a,b) $\in$ R en (b,c) $\in$R. Omdat (a,c) $\in$ R o R en R o R $\subset$ R is (a,c) $\in$ R. Omdat (a,b), (b,c) en (a,c) $\in$ R en omdat (a,c) willekeurig was volgt volgens de definitie dat R transitief is. $\square$

1.6 Oefening 3.2.6

(a)
Juist. Als R en S reflexief zijn wordt elk element x $\in$ X door R en S op zichzelf afgebeeld. Dan wordt het element door S o R gewoon nog eens op zichzelf afgebeeld.

(b)
Fout. Neem de verzameling X met

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\} \tag{1}$$

We definiëren de relatie R en S als

$$R := (1,2),(2,1),(2,3),(3,2)S := (1,4),(4,1),(3,5),(5,3)$$

R en S zijn beiden symmetrisch, maar S o R is dit niet.

(c)
Fout. Neem de verzameling X gedefinieerd als in (1). Neem vervolgens

$$R := (1,4),(4,2)S := (2,5),(5,3)$$

Dan zijn R en S transitief, maar S o R niet.

2 Hoofdstuk 4: Functies

2.1 Oefening 4.1.7

(a) $f^{-1}(f(A)) \subset A$? Fout.
Neem

$$\begin{aligned} X &= \{1,2\} \\ Y &= \{a\} \end{aligned}$$

Neem de functie

$$f : X \to Y : x \longmapsto a$$

Neem nu de verzameling A in X met $A = \{1\}$. Dan is $f(A) = a$, maar $f^{-1}(f(A)) = \{1,2\}$.

(b) $A \subset f^{-1}(f(A))$? Juist.

Bewijs. Kies a ∈ A willekeurig. Dan is f(a) ⊂ f(A). Volgens de definitie van invers beeld geldt dan dat a ∈ $f^{-1}(f(A))$ en omdat a willekeurig gekozen was geldt dit voor elke a ∈ A, en dus is $A \subset f^{-1}(f(A))$. □

(b) $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$? Juist.

Bewijs. Kies y ∈ $f\left(f^{-1}(B)\right)$ willekeurig. Per definitie geldt dat $y = f(x)$ voor een zekere x ∈ $f^{-1}(B)$. Dan volgt per definitie van invers beeld dat f(x) ∈ B. Dus is y ∈ B en omdat y willekeurig was geldt dit voor de hele verzameling. □

(d) $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$? Fout.
Neem

$$\begin{aligned} X &= \{1\} \\ Y &= \{a,b\} \\ f :& X \to Y : x \longmapsto a \\ B &= \{b\} \end{aligned}$$

2.2 Oefening 4.1.10

(a) Geen.

Bewijs. Neem X = {1, 2, 3}. Zij f een functie van X naar ∅. Dan zijn f(1), f(2) en f(3) ∈ ∅. Maar de lege verzameling heeft geen elementen. Deze contradictie eindigt het bewijs. □

(b) Één.
De enige mogelijke relatie van $\emptyset$ naar X is de lege relatie. Deze relatie is een functie. ("Op hoeveel verschillende manieren kan je niets doen? Één.")

2.3 4.1.11

(a) $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$? Juist.
Neem $x \in A_1 \cup A_2$ willekeurig. Dan geldt dat $x \in A_1$ of $x \in A_2$. Stel eerst dat $x \in A_1$. Dan geldt dat $f(x) \in f(A_1)$. Stel nu dat $x \in A_2$. Dan geldt dat $f(x) \in f(A_2)$. Hieruit volgt dat $f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Omdat $x \in A_1 \cup A_2$ willekeurig gekozen was volgt hieruit dat $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$.

(b) $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$? Juist.
Neem $x \in A_1 \cup A_2$ willekeurig. Dan geldt dat $f(x) \in f(A_1)$ of $f(x) \in f(A_2)$. Stel eerst dat $f(x) \in f(A_1)$. Dan geldt zeker dat $f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$. Stel nu dat $f(x) \in f(A_2)$. Dan geldt zeker dat $f(x) \in f(A_1 \cup A_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

(c)
Omdat beide inclusies (a) en (b) gelden volgt dat $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$.

(d) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$? Juist.
Neem $x \in A_1 \cap A_2$ willekeurig. Dan geldt dat $x \in A_1$ en $x \in A_2$. Dan geldt dat $f(x) \in f(A_1)$ en $f(x) \in f(A_2)$. Omdat x willekeurig gekozen was volgt hieruit dat $f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$.

(e) $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$? Fout.
Neem

$$\begin{aligned} X &= \{1,2\} \\ Y &= \{a\} \\ f :& X \to Y : x \longmapsto a \\ A_1 &= \{1\} \\ A_2 &= \{2\} \end{aligned}$$

Dan is $f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset$ en $f(A_1) \cap f(A_2) = \{a\} \subset \{a\} = \{a\}$.

(f) $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$? Fout.
Aangezien $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ niet geldt, geldt de gelijkheid zeker niet.

2.4 Oefening 4.1.12

Allemaal juist.

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$? Juist.
Kies x $\in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ willekeurig. Omdat x $\in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ is f(x) $\in B_1 \cup B_2$. Stel dat f(x) $\in B_1$. Dan is f(x) zeker $\in B_1 \cup B_2$. Als f(x) $\in B_1$, dan is x $\in f^{-1}(B_1)$. Stel nu dat f(x) $\in B_2$. Dan is x $\in f^{-1}(B_2)$. Omdat x $\in f^{-1}(B_1)$ of x $\in f^{-1}(B_2)$ is x $\in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Omdat x willekeurig was geldt de inclusie.

(b) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$? Juist.
Kies x $\in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ willekeurig. Dan is x $\in f^{-1}(B_1)$ of x $\in f^{-1}(B_2)$. Veronderstel dat x $\in f^{-1}(B_1)$. Dan volgt per definitie dat f(x) $\in B_1$. Dan geldt zeker dat f(x) $\in B_1 \cup B_2$. Veronderstel nu dat x $\in f^{-1}(B_2)$. Dan geldt dat f(x) $\in B_2$ en dus ook f(x) $\in B_1 \cup B_2$. Dus geldt dat $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, en vermits x willekeurig gekozen was, geldt de te bewijzen inclusie.

(c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$? Juist. Omdat beide inclusies (a) en (b) gelden, geldt de gelijkheid $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$? Juist.
Neem $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ willekeurig. Omdat $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ is $f(x) \in B_1 \cap B_2$. Dan geldt dat f(x) zowel in B_1 als in B_2 zit. Dan volgt uit de definitie van doorsnedes van verzamelingen dat $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(e) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$? Juist.
Neem $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ willekeurig. Dan geldt dat $f(x) \in (B_1 \cap B_2)$. Dan volgt uit de definitie van invers beeld dat $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

(f) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$? Juist.
Omdat beide inclusies (e) en (d) kloppen geldt de gelijkheid $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

2.5 Oefening 4.2.4

(a) Juist.

Bewijs. Omdat zowel f als g injectief zijn geldt voor elke $x_1, x_2 \in X$ en elke $y_1, y_2 \in X$ dat als $f(x_1) = f(x_2)$ en $g(y_1) = g(y_2)$ $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$.
Stel dat f en g injectief zijn, maar g o f niet. Dan is er een koppel $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$ waarvoor geldt dat $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Neem $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. Dan volgt uit het vorige dat $g(y_1) = g(y_2)$. Uit de injectiviteit van f volgt dat $y_1 \neq y_2$, maar g was ook injectief. Deze contradictie eindigt het bewijs. □

<u>Alternatief</u>

Bewijs. Gegeven is dat f en g injectief zijn.
Neem $x_1, x_2 \in X$ willekeurig. Stel dat $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. We bewijzen dat $x_1 = x_2$.
Neem $y_1 = f(x_1)$ en $y_2 = f(x_2)$. Dus $g(y_1) = g(y_2)$. Maar g is injectief, dus $y_1 = y_2$. Hieruit volgt dat $f(x_1) = f(x_2)$, maar omdat f injectief is, geldt dat $x_1 = x_2$. Dus g o f is injectief. □

(b) Juist.

Bewijs. We nemen aan dat f en g surjectief zijn. We bewijzen dat voor alle z $\in$ Z: $f^{-1}(g^{-1}(z)) \neq \emptyset$.
Neem z $\in$ Z willekeurig. Omdat g surjectief is, heeft z een invers beeld $g^{-1}(z) = y_i \in Y$ (het invers beeld is niet perse uniek, dus het invers beeld van z kan uit meerdere elementen bestaan). Omdat f surjectief is heeft elke $y_i = g^{-1}(z)$ een invers beeld $f^{-1}(y_i) = x_j \in X$. Oftewel $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x_j \in X$. Omdat z $\in$ Z willekeurig gekozen was geldt dat voor alle z $\in$ Z $f^{-1}(g^{-1}(z)) \neq \emptyset$. Hiermee is de stelling bewezen. □

(c) en (d) Fout.
Neem

$$\begin{aligned} X &= \{1\} \\ Y &= \{a, b\} \\ Z &= \{\pi\} \\ f &: X \to Y : x \longmapsto a \\ g &: Y \to Z : y \longmapsto \pi \end{aligned}$$

Dan is g o f bijectief, dus zowel injectief als surjectief, maar f is injectief en g is surjectief.

3 Hoofstuk 5: Kardinaliteit

Samenvatting

Opmerking: over de oefeningen met volledige inductie, ik ga de moeite niet nemen van ze allemaal mooi uit te typen, want dat ziet er gewoon ook irritant uit, dus ik hou het op vergelijkingen onder elkaar. Doe dit **nooit** op een examen! Je moet **altijd** een zin in de trend van 'dan volgt', 'dan geldt', 'hieruit volgt' etc tussen **al** uw vergelijkingen zetten!

3.1 Oefening 5.1.2

Bewijs. Stel $Y^{'} = Y \backslash X$, dan geldt dat $X \cup Y = X \cup Y^{'}$, dat $X \cap Y^{'} = \emptyset$ en dat $Y^{'}$ eindig (en dus aftelbaar) is. Als $Y^{'} = \emptyset$, geldt dat $X \cup Y = X \cup Y^{'} = X$ en is $X \cup Y$ zeker aftelbaar oneindig. Veronderstel verder dat $Y^{'} \neq \emptyset$ en stel $\#Y^{'} = n \in \mathbb{N}_0$. Omdat $\#Y^{'} = n$ bestaat er een bijectie $f : Y^{'} \to \mathbb{E}_n$. Omdat X aftelbaar oneindig is bestaat er een bijectie $g : X \to \mathbb{N}_0$. Beschouw nu de functie

$$h : X \cup Y = X \cup Y^{'} \longrightarrow \mathbb{N}_0 : h(z) \longmapsto \begin{cases} f(z) \text{ als } z \in Y^{'} \\ \\ g(z) + n \text{ als } z \in X \end{cases}$$

We moeten aantonen dat h een bijectie is.
Eerst bewijzen we dat h injectief is.
Neem $a, b \in X$ met $h(a) = h(b) = m$ met $a \neq b$. Stel dat $m \leq n$, dan geldt dat $h(a)$ en $h(b)$ worden afgebeeld op f. Dan geldt dat $h(a) = f(a) = h(b) = f(b)$. Dus is $f(a) = f(b)$. Omdat f een bijectie is geldt dan dat $a = b$. Veronderstel verder dat $m > n$. Dan geldt dat $h(a) = g(a) + n = h(b) = g(b) + n$. Ofwel dat $g(a) + n = g(b) + n$. Hieruit volgt dat $g(a) = g(b)$, maar omdat g een bijectie is volgt dat $a = b$. In beide gevallen (zowel voor $m \leq n$ als $m > n$) krijgen we een contradictie. Hieruit volgt dat als $a, b \in X$ met $h(a) = h(b)$ dat $a = b$, dus volgt uit de definitie van injectiviteit dat h injectief is.
Nu bewijzen we dat h surjectief is.
Neem $m \in \mathbb{N}_0$ willekeurig. Dan geldt dat $m \leq n$ of $m > n$. Stel dat $m \leq n$. Dan geldt dat h wordt afgebeeld op f. Omdat f een bijectie is van $Y^{'}$ naar $\mathbb{E}_n$ en omdat $m \in \mathbb{E}_n$ (want $m \leq n$) geldt dat er exact een element $y \in Y^{'}$ bestaat zo dat $h(y) = f(y) = m$. Stel nu dat $m > n$, dan geldt dat h wordt afgebeeld op g. Omdat g een bijectie is van X naar $\mathbb{N}_0$ en omdat $h(x) - n = g(x)$ geldt dat er precies een $x \in X$ bestaat zo dat $h(x) - n = g(x) = m$. Omdat $m \in \mathbb{N}_0$ willekeurig gekozen was volgt hieruit dat h surjectief is.
Omdat h zowel injectief als surjectief is volgt hieruit dat h een bijectie is, wat we moesten bewijzen. □

Als alternatief kan je hier uit het ongerijmde werken, en dit levert.

Bewijs. Gegeven is dat X een aftelbaar oneindige verzameling en Y een eindige verzameling is. Stel dat $X \cup Y$ overaftelbaar is, dan geldt dat ofwel X overaftelbaar is, ofwel Y, ofwel beiden, maar uit het gegeven weten we al dat X aftelbaar is, dus moet Y overaftelbaar zijn, maar in het gegeven staat dat Y ook aftelbaar is, hieruit volgt dat $X \cup Y$ niet overaftelbaar is, dus is $X \cup Y$ aftelbaar. □

3.2 Oefening 5.2.4

(a) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

Bewijs. Basisstap
Voor n = 1 vinden we

$$(2-1)^3 = 1^2(2^2-1)$$
$$1 = 1$$

Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat de gelijkheid geldt voor alle n $\in \mathbb{N}$. We bewijzen dat ze klopt voor $n+1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^3 &= (n+1)^2(2(n+1)^2-1) \\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 + (2(n+1)-1)^3 &= (n+1)^2(2(n+1)^2-1) \\ n^2(2n^2-1) + (2(n+1)-1)^3 &= (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) \\ 2n^4+8n^3+11n^2+n+1 &= 2n^4+8n^3+11n^2+n+1 \end{aligned}$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, kunnen we besluiten dat de gelijkheid klopt voor elke n $\in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$. □

(b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$

Bewijs. Basisstap
Voor n = 1

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Hiermee is de basistap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat de gelijkheid geldt voor alle n $\in \mathbb{N}$. We bewijzen dat ze klopt voor $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n+1}{2n+3}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$
$$\frac{n}{2n+1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$
$$\frac{4n^3+8n^2+5n+1}{8n^3+20n^2+14n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$
$$8n^4+28n^3+34n^2+17n+3 = 8n^4+28n^3+34n^2+17n+3$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie Omdat zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, kunnen we besluiten dat de gelijkheid klopt voor elke n $\in \mathbb{N}$ met $n \geq 1$. □

3.3 Oefening 5.2.6

$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n}$ voor alle $n \geq 2$.

Bewijs. Basisstap Voor n = 2

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}+1 > 2$$
$$\sqrt{2} > 1$$
$$2 > 1$$

Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat de ongelijkheid geldt voor alle $n \geq 2$. We bewijzen dat ze geldt voor $n+1$.

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n+1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

Uit het gegeven volgt dat $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} > \sqrt{n}$. We bewijzen dat $\sqrt{n} > \frac{n}{\sqrt{n+1}}$.

$$\sqrt{n} > \frac{n}{\sqrt{n+1}}$$

$$n > \frac{n^2}{n+1}$$

$$n^2 + n > n^2$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat zowel de basisstap als de inductiestap bewezen zijn, kunnen we besluiten dat de ongelijkheid klopt voor elke n $\in \mathbb{N}$ met $n \geq 2$. □

3.4 Oefening 5.2.7

$a_0 = 0$, $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$ voor alle $n \geq 0$

Te Bewijzen: $a_n = n3^{n-1}$ voor alle $n \geq 0$.

Bewijs. Basisstap Voor $n = 0$

$$0 = 0$$

Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat $a_n = n3^{n-1}$ voor alle $n \geq 0$. We bewijzen dat dit ook geldt voor $n + 1$.

$$a_{n+1} = (n+1)3^n$$

$$3a_n + 3^n = (n+1)3^n$$

$$3(n3^{n-1}) = (n+1)3^n$$

$$(n+1)3^n = (n+1)3^n$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat de basisstap en de inductiestap zijn bewezen kunnen we besluiten dat $a_n = n3^{n-1}$ voor alle $n \geq 0$. □

3.5 Oefening 5.2.8

Gegeven:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \text{ en } a_0 = 0$$
$$a_{m+1} = a_m + a_{m-1} \quad \forall m \geq 1 \text{ en } a_0 = 0$$

Te Bewijzen: $a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$ met inductie op n.

Bewijs. Basisstap n = 1

$$a_{m+1} = a_m + a_{m-1}$$

Dit is gewoon het gegeven. Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat $a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$ voor alle $j \leq n$. We bewijzen dat $a_{m+n+1} = a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+2}$.

$$\begin{aligned}
a_{m+n+1} &= a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+2} \\
&\Downarrow \text{ (fibonacci)} \\
a_{m+n} + a_{m+n-1} &= a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+2} \\
a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1} + a_{m-1}a_{n-1} + a_m a_n &= a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+2} \\
a_{m-1}a_n + a_{m-1}a_{n-1} + a_m a_{n+1} + a_m a_n &= a_{m-1}a_{n+1} + a_m a_{n+1} + a_m a_n \\
a_{m-1}a_n + a_{m-1}a_{n-1} &= a_{m-1}a_{n+1} \\
a_{m-1}a_{n+1} &= a_{m-1}a_{n+1}
\end{aligned}$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn kunnen we besluiten dat $a_{m+n} = a_{m-1}a_n + a_m a_{n+1}$. □

4 Hoofdstuk 6: Getallen en tellen

4.1 Oefening 6.1.1

Met volledige inductie.
Stelling 6.1.1 zegt dat als X en Y disjuncte eindige verzamelingen zijn dan is

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|$$

Bewijs. Zij $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onderling disjuncte eindige verzamelingen.
Basisstap
Voor $n = 1$ geldt

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{j=1}^{1} X_j\right| &= |X_1| \\ &= \sum_{j=1}^{1} |X_j|\end{aligned}$$

Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
Stel dat de gelijkheid geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$. We bewijzen dat ze dan ook geldt voor n+1.

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n+1} X_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{n} X_j \cup X_{n+1}\right|$$

Dan volgt uit stelling 6.1.1 dat

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{j=1}^{n} X_j \cup X_{n+1}\right| &= \left|\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |X_j| + |X_{n+1}| \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} |X_j|\end{aligned}$$

Conclusie:
Omdat de basisstap en de inductiestap zijn bewezen geldt dat voor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ onderling disjunctie, eindige verzamelingen

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} X_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |X_j|$$

□

4.2 Oefening 6.1.5

Bewijs. We weten dat

$$X = \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y)$$

Deze unie is disjunct, dus voor elke $y_1, y_2 \in Y$ met $y_1 \neq y_2$ geld dat $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$. De unie is disjunct want elk element $x \in X$ heeft maximum 1

beeld, anders zou f geen functie zijn.
Bovendien volgt uit het gegeven dat voor elke $y \in Y$ $|f^{-1}(y)| = k$. Dan volgt uit het telprincipe voor disjuncte verzamelingen dat

$$|X| = \left| \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \right| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| = \sum_{y \in Y} k = k|Y|$$

□

4.3 Oefening 6.2.1

Deze oefening bestaat voornamelijk uit eenvoudig rekenwerk. Ik ga de tip van het boek niet gebruiken omdat het ook veel eenvoudiger kan.

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

Bewijs. Indien $r > n$ geldt de gelijkheid zeker want dan is $0 = 0 + 0$. Als $r = n$ dan is $1 = 0 + 1$ dus geldt de gelijkheid ook. Indien $r < n$ krijgen we

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1} &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&\text{Op gelijke noemer zetten.} \\
&= \frac{(n-1)!(r-1)!(n-r)! + (n-1)!(n-r-1)!r!}{r!(n-r)!(r-1)!(n-r-1)!} \\
&\text{Een aantal termen naar buiten brengen.} \\
&= \frac{(r-1)!(n-r-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!} \left(\frac{(n-1)!(n-r) + (n-1)!r}{r!(n-r)!} \right) \\
&= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= \binom{n}{r}
\end{aligned}$$

□

5 Hoofdstuk 7: Combinatoriek

5.1 Oefening 7.1.1

Zij $b_0 = 1$ en

$$b_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{n}$$

(a)
Voor het bewijs gaan we een eigenschap van binomiaal coëfficienten gebruiken.

Lemma 1.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Bewijs. Indien $k > n$ is hier zeker aan voldaan want $0 + 0 = 0$
Indien $k = n$ krijgen we $1 + 0 = 1$, dus geldt de gelijkheid ook.
Stel nu dat $k + 1 \leq n$, dan volgt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1)!(n-k-1)! + n!k!(n-k)!}{k!(n-k)!(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{k!(n-k-1)!}{k!(n-k-1)!} \left(\frac{n!(k+1)! + n!(n-k)!}{(n-k)!(k+1)!} \right) \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Bewijs. We weten al dat $b_0 = 1$, bovendien zien we dat $b_1 = \binom{1}{0} = 1$. Dus de beginvoorwaarden zijn gelijk.
Zij $n \in \mathbb{N}$ willekeurig. We tonen aan dat $b_n + b_{n+1} = b_{n+2}$.
Er geldt

$$\begin{aligned}
b_n + b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k} + 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-k}{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k+1} \right]
\end{aligned}$$

Toepassen van het lemma geeft dit

$$\begin{aligned} b_n + b_{n+1} &= \binom{n+2}{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+2-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+2-k}{k} \\ &= b_{n+2} \end{aligned}$$

Dit bewijst de recursierelatie. □

(b)
Na even te kijken zien we dat

$b_0 = 1$	$b_1 = 1$	$b_2 = 2$
$b_3 = 3$	$b_4 = 5$	$b_5 = 8$
$b_6 = 13$	$b_7 = 21$	$b_8 = 34$
	...	

5.2 Oefening 7.1.2

Bewijs. Voor a_1 vinden we als oplossingenverzameling $\{A, B\}$ en voor a_2 vinden we $\{AA, AB, BA\}$. De beginvoorwaarden kloppen dus.
Voor het eerste deel van het bewijs moeten we aantonen dat

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Elk woord van n letters heeft 2 mogelijkheden. Ofwel eindigt het op een A, ofwel eindigt het op een B. Als het op een A eindigt, bestaat het uit een woord met n-1 letters, aangevuld met een A. En je mag elk woord van n-1 letters aanvullen met een A, het blijft een correct woord. Dus er zijn a_{n-1} woorden van n letters die eindigen op een A. Stel dat het woord eindigt op een B, dan weten we zeker dat de letter voor de B een A is, want er mag geen BB in het woord voorkomen. Dus de woorden van n letters die eindigen op een B eindigen sowieso op AB. We mogen elk woord van n-2 letters aanvullen met AB en het zal nog altijd een geldig woord zijn. Dus elk woord dat eindigt op B (en dus AB) is een geldig woord van n-2 letters aangevult met AB. Er zijn dus a_{n-2} mogelijkheden voor een woord van n letters om te eindigen op B. Het is duidelijk dat elk woord ofwel eindigt op een A, ofwel op een B. De twee verzamelingen van woorden die eindigen op A en de woorden die eindigen op B zijn onderling disjunct, dus het totaal aantal woorden van n letters is de som van de twee en dus is

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Nu gaan we proberen een expliciete formule te vinden voor a_n. We gaan de expliciete formule voor a_n op heel gelijkaardige manier zoeken als voor de rij

van fibonacci.
Zij
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$
de voortbrengende functie van de recursierelatie. Vanwege de beginvoorwaarden geldt dan dat
$$f(x) = 2x + 3x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k$$
En omdat $k \geq 3$ mogen we de recursierelatie toepassen. Hierdoor krijgen we
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} (a_{k-1} + a_{k-2}) x^k \\ &= 2x + 3x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-1} x^k + \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} x^k \end{aligned}$$
Als we nu de twee sommen apart gaan bekijken krijgen we.
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-1} x^k &= a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots \\ &= x(a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots) \\ &= x \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \\ &= x(f(x) - 2x) \end{aligned}$$
en voor de andere som krijgen we
$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^{\infty} a_{k-2} x^k &= a_1 x^3 + a_2 x^4 + \cdots \\ &= x^2 \sum_{k=3}^{\infty} a_k x^k \\ &= x^2 f(x) \end{aligned}$$
Dus vinden we voor $f(x)$
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 3x^2 + x f(x) - 2x^2 + x^2 f(x) \\ f(x) - x f(x) - x^2 f(x) &= 2x + x^2 \\ f(x) &= \frac{x^2 + 2x}{1 - x - x^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{(1 - \tau_1 x)(1 - \tau_2 x)} \end{aligned}$$

met $\tau_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ en $\tau_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.
Bij splitsen in partiëelbreuken vinden krijgen we

$$\frac{x^2+2x}{(1-\tau_1 x)(1-\tau_2 x)} = \frac{A}{1-\tau_1 x} + \frac{B}{1-\tau_2 x} + C$$

Dus krijgen we dat

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -\tau_1 A - \tau_2 B - C &= 2 \\ -C &= 1 \end{aligned}$$

Na wat eenvoudig rekenwerk vinden we dan dat

$$\begin{aligned} A &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ B &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \\ C &= -1 \end{aligned}$$

Ofwel krijgen we dat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+2x}{(1-\tau_1 x)(1-\tau_2 x)} \\ &= \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\tau_1 x}\right) + \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\frac{1}{1-\tau_2 x}\right) - 1 \\ &= \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\sum_{k=0}^{\infty}((\tau_1 x)^k + (\tau_2 x)^k)\right) - 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}(\tau_1^k + \tau_2^k)\right)x^k\right) - 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)\right)x^k\right) - 1 \end{aligned}$$

Hieruit vinden we dat

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$\square$

5.3 Oefening 7.1.3

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

(a)

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix} \\
&= 1+a^2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix} \\
&= 1+a^2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1+a^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1+a^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+a^2)D_{n-1} - (a^2)D_{n-2}
\end{aligned}$$

(b)

<u>Plan:</u>

- Gebruik de recursierelatie op D_n om een relatie te vinden in $f(x)$
- Vindt hieruit een "gesloten formule"voor $f(x)$
- Bereken de McLaurinreeks van f, eventueel gebruik makend splitsen in partieelbreuken
- Vergelijk de cofficienten van beide reeksten en bepaal (D_n)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \\
&= 1 + (1+a^2)x + \sum_{n=2}^{\infty} D_n x^n \\
&= 1 + (1+a^2)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}\right] x^n \\
&= 1 + (1+a^2)x + (1+a^2)\sum_{n=2}^{\infty} D_{n-1}x^n - a^2 \sum_{n=2}^{\infty} D_{n-2}x^n \\
&= 1 + (1+a^2)x + (1+a^2)x\sum_{n=1}^{\infty} D_n x^n - a^2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n \\
&= 1 + (1+a^2)x + (1+a^2)x(f(x)-1) - a^2x^2(f(x)) \\
&= 1 + (1+a^2)x + (1+a^2)x(f(x)) - (1+a^2)x - a^2x^2(f(x)) \\
f(x) &= 1 + (1+a^2)x(f(x)) + a^2x^2(f(x)) \\
f(x)(1-(1+a^2)x - a^2x^2) &= 1 \\
f(x) &= \frac{1}{1-(1+a^2)x + a^2x^2} \\
&= \frac{1}{(a^2x-1)(x-1)} \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{a^2x-1}
\end{aligned}
$$

We weten dus dat

$$
\begin{aligned}
A(a^2x-1) + B(x-1) &= 1 \\
a^2xA - A + Bx - B &= 1
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat

$$
\begin{aligned}
a^2xA + Bx &= 0 \\
-A - B &= 1
\end{aligned}
$$

Als we B schrijven als $B = -A - 1$ vinden we in de eerste vergelijking

$$
\begin{aligned}
a^2xA - Ax - x &= 0 \\
a^2xA - Ax &= x \\
A(a^2x - x) &= x \\
A &= \frac{x}{a^2x - x} \\
A &= \frac{1}{a^2-1}
\end{aligned}
$$

Dus vinden we voor B

$$\begin{aligned} B &= -A - 1 \\ &= -\frac{1}{a^2 - 1} - 1 \\ &= \frac{-1 - a^2 + 1}{a^2 - 1} = \frac{-a^2}{a^2 - 1} \\ &= \frac{a^2}{1 - a^2} \end{aligned}$$

Dus vinden we voor $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{a^2 - 1} \frac{1}{1 - x} + \frac{a^2}{a^2 - 1} \frac{1}{1 - a^2 x} \\ \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n &= -\frac{1}{a^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{a^2}{a^2 - 1} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{a^2 - 1} + \frac{a^{2n+2}}{a^2 - 1} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1} x^n \end{aligned}$$

Hieruit vinden we dat

$$D_n = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1}$$

5.4 Oefening 7.1.4

(a)

We moeten bewijzen dat

$$a_{n+1} = 3a_n + (4^n - a_n) \text{ ofwel } a_{n+1} = 2a_n + 4^n$$

Bewijs. Neem een woord met $n + 1$ letters. Dan zijn er twee mogelijkheden. Ofwel eindigt het op een A, ofwel eindigt het niet op een A. Stel dat het woord eindigt op een A. Dan bestaat het uit een woord van n letters met een willekeurig even aantal A's, aangevuld met andere letters. Er zijn 4^n mogelijkheden om een woord van n letters te maken met een willekeurig aantal letters. Er zijn a_n mogelijkheden om een woord te maken met een oneven aantal A's. Er zijn dus $(4^n - a_n)$ mogelijkheden om een woord te maken dat wel op een A eindigt. Stel dat het niet eindigt op een A. Dan bestaat het uit een geldig woord met n letters, aangevuld met een B, C of een D. Er zijn dus $3a_n$ mogelijkheden om een woord te maken dat niet op een A eindigt. Deze twee verzamelingen zijn onderling disjunct, dus het totaal aantal woorden met a_{n+1} letters met een oneven aantal A's is de som van de twee en dus vinden we

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n + (4^n - a_n) \\ &= 2a_n + 4^n \end{aligned}$$

(b)
Zij

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Het is duidelijk dat $a_0 = 0$ want je kan geen enkel woord maken met twee letters. We kunnen deze som dus herschrijven als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}$$

Hierop kunnen we de recursierelatie toepassen die we eerder bewezen hebben.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2a_n + 4^n) x^{n+1} \\ &= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{n+1} \end{aligned}$$

We gaan de twee sommen eerst terug eens apart bekijken.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 2(a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots) \\ &= 2x(a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) \\ &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= 2x f(x) \end{aligned}$$

En de andere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^{n+1} &= x + 4x^2 + 16x^3 + \cdots \\ &= \frac{x}{1-4x} \end{aligned}$$

We vinden dus voor $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x f(x) + \frac{x}{1-4x} \\ f(x) &= \frac{x}{(1-2x)(1-4x)} \end{aligned}$$

Wat we inderdaad moesten vinden.
(c)
Om a_n te vinden moeten we nu gewoon nog $f(x)$ een aantal keer herschrijven.

We moeten $\frac{x}{(1-2x)(1-4x)}$ eerst splitsen in partieelbreuken. We vinden

$$\frac{x}{(1-2x)(1-4x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-4x}$$

Hieruit volgt:

$$A + B = 0$$
$$-4A - 2B = 1$$

Na wat eenvoudig rekenwerk vinden we:

$$A = -\frac{1}{2}$$
$$B = \frac{1}{2}$$

En dus vinden we voor $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-4x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-2x} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-4x} - \frac{1}{1-2x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(4^n - 2^n)\right) x^n \end{aligned}$$

Hieruit volgt dus dat

$$a_n = \frac{4^n - 2^n}{2}$$

□

5.5 Oefening 7.1.5

Bewijs. Eerst moeten we de recursierelatie

$$b_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$$

aantonen. Dit is niet zo gemakkelijk als bij de vorige oefeningen. Er zijn b_n woorden van n letters. Laten we eerst kijken hoeveel van die woorden op een A eindigen. Als een woord van n letters op een A eindigt betekent dit dat het eigenlijk een geldig woord van $n-1$ letters is, aangevuld met een A. Zo zijn er b_{n-1} mogelijkheden. Er zijn dus b_{n-1} woorden van n letters die op een A eindigen. Nu wordt het moeilijker. Woorden van n letters die op een B of een C eindigen zijn ofwel een woord van $n-2$ letters aangevuld met AB of AC, ofwel een woord van $n-1$ letters dat op een C of een B eindigt, respectievelijk. Er zijn dus $2(b_{n-2})$ woorden van n letters die op AB of op AC eindigen. Nu gaan we kijken naar de overige woorden. Woorden van n letters die op een B eindigen bestaan uit een woord van $n-1$ letters dat *niet* op een B eindigt, aangevuld met een B en een woord van n letters dat op een C eindigt bestaat uit een woord van $n-1$ letters dat *niet* op een C eindigt, aangevuld met een C. Laten we kijken naar de woorden van n letters, hoeveel hiervan eindigen op een B of een C? We weten al dat er b_{n-1} woorden van n letters op een A eindigen, dus er zijn $(b_n - b_{n-1})$ woorden die op een B of een C eindigen. Omdat B en C exact dezelfde rol spelen, betekent dit dat de helft van wat overblijft op een B eindigt en de andere helft op een C eindigt. Dus het aantal woorden van n letters dat op een B eindigt is gelijk aan $\frac{1}{2}(b_n - b_{n-1})$ en hetzelfde geldt voor woorden van n letters die op een C eindigen. We zijn echter niet genteresseerd in woorden van n letters, maar in woorden van $n-1$ letters. Hier geldt natuurlijk hetzelfde dus het aantal woorden van $n-1$ letters die op een B of een C eindigen zijn elk gelijk aan $\frac{1}{2}(b_{n-1} - b_{n-2})$. Al deze verzamelingen zijn onderling disjunct, dus hun totaal is de som van de verzamelingen. We vinden dus voor b_n

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} + 2b_{n-2} + 2(\frac{1}{2}(b_{n-1} - b_{n-2})) \\ &= b_{n-1} + 2b_{n-2} + b_{n-1} - b_{n-2} \\ &= 2b_{n-1} + b_{n-2} \end{aligned}$$

wat we moesten aantonen.
Nu gaan we proberen een expliciete formule voor b_n te vinden.
We moeten eerst de begin voorwaarden vinden voor $n < 3$, maar dit is niet echt moeilijk. Als er maar 1 letter in het woord mag zijn, zijn er slechts drie mogelijkheden, we vinden

$$b_1 = \{A, B, C\}$$

Dus $b_1 = 3$. Voor b_2 vinden we

$$b_2 = \{AA, AB, AC, BC, BA, CB, CA\}$$

Dus $b_2 = 7$. Met deze beginvoorwaarden kunnen we b_n vinden.
Zij

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Dan volgt uit onze beginvoorwaarden dat

$$f(x) = 3x + 7x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} b_n x^n$$

En nu kunnen we de recursierelatie toepassen en vinden we

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 7x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(2b_{n-1} + b_{n-2})x^n \\ &= 3x + 7x^2 + 2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-1}x^n + \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2}x^n \end{aligned}$$

We gaan weer de sommen apart bekijken en vinden

$$\begin{aligned}
2 \cdot \sum_{n=3}^{\infty} b_{n-1}x^n &= 2(b_2x^3 + b_3x^4 + \cdots) \\
&= 2x\left(\sum_{n=2}^{\infty} b_nx^n\right) \\
&= 2x(f(x) - 3x) \\
&= 2xf(x) - 6x^2
\end{aligned}$$

En voor de andere som

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{\infty} b_{n-2}x^n &= b_1x^3 + b_2x^4 + \cdots \\
&= x^2(b_1x + b_2x^2 + \cdots) \\
&= x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_nx^n\right) \\
&= x^2f(x)
\end{aligned}$$

Dus we vinden voor $f(x)$ dat

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3x + 7x^2 + 2xf(x) - 6x^2 + x^2f(x) \\
f(x) &= \frac{x^2+3x}{1-2x-x^2}
\end{aligned}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat

$$1 - 2x - x^2 = (1 - \tau_1x)(1 - \tau_2x)$$

Met $\tau_1 = 1 + \sqrt{2}$ en $\tau_2 = 1 - \sqrt{2}$.
We gaan de breuk terug splitsen in partieelbreuken om een eenvoudigere vorm te krijgen.

$$\frac{x^2+3x}{(1-\tau_1x)(1-\tau_2x)} = \frac{A}{1-\tau_1x} + \frac{B}{1-\tau_2x} + C$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 0 \\
-\tau_2A - \tau_1B - 2C &= 3 \\
C &= -1
\end{aligned}$$

Na wat eenvoudig rekenwerk volgt dus dat

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\
B &= \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\
C &= -1
\end{aligned}$$

Dus vinden we

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1}{1-\tau_1 x} + \frac{\tau_2}{1-\tau_2 x}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\tau_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau_1^n x^n + \tau_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n x^n\right) - 1 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(\tau_1^{n+1} + \tau_2^{n+1})\right) x^n\right) - 1 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}\right) x^n\right) - 1
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt dat

$$
b_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}
$$

□

6 Hoofdstuk 8: Orderelaties

6.1 Oefening 8.1.1

(a)
Geen orderelatie want: niet anti-symmetrisch.
Voorbeeld:
(regenen, negeren) $\in$ R en (negeren, regenen) $\in$ R maar regenen $\neq$ negeren.
(b) Wel orderelatie, partieel.
(c) Wel orderelatie, totaal.

6.2 Oefening 8.1.2

(a) Ja: totaal.
$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \geq y\}$ is equivalent met $\{(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y \leq x\}$ en er wordt in de cursus bewezen dat dit een totaal geordende relatie is.
(b) Neen.
Voorbeeld:
$\{(-1, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} : -1 \leq 1, |1| \leq |-1|, |-1| \leq |1|$ maar $-1 \neq 1$.
(c) Ja:
Reflexief: $|x| < |x|$ of $x = x$. Dit is triviaal.

Anti-symmetrisch: als $|x| < |y|$ en $|y| < |x|$ is $x = y$.

Transitief: als $|x| < |y|$ en $|y| < |z|$ is $|x| < |z|$.

6.3 Oefening 8.1.3

We definiëren
$$\begin{cases} P_x & = \{a \in X | a \preccurlyeq x\} \ \ \forall x \ \in \ X \\ P_y & = \{b \in Y | b \preccurlyeq y\} \ \ \forall y \ \in \ Y \end{cases}$$

Bewijs. $\Rightarrow$ Neem $x, y \in$ X met $x \preccurlyeq y$ willekeurig. Omdat $a \preccurlyeq x$ voor alle a $\in P_x$ en $b \preccurlyeq y$ voor alle $b \in P_y$ geldt dan dat $a \preccurlyeq x \preccurlyeq b \preccurlyeq y$. Hieruit volgt dat $a \preccurlyeq b$ voor alle $a \in P_x$ en voor alle $b \in P_y$. Omdat $x, y \in X$ met $x \preccurlyeq y$ willekeurig gekozen is geldt dan dat $P_x \subset P_y$.
$\Leftarrow$ Neem nu aan dat $P_x \subset P_y$. Dan geldt voor alle a $\in P_x$ dat a $\in P_y$. Dan geldt voor x $\in$ X willekeurig dat x $\in P_y$. Dan is volgens onze definitie van P_y x $\preccurlyeq$ y. Omdat x $\in$ X willekeurig was is hiermee de stelling bewezen. □

6.4 Oefening 8.1.5

Uit het ongerijmde.

Bewijs. Neem aan dat $\sup A$ niet uniek is. We nemen $s = \sup A$ en $r = \sup A$ met r,s $\in$ X en $r \neq s$. Omdat $s = \sup A$ is s een bovengrens van A. Dus geldt voor elke x $\in$ A dat x $\leq$ s. Evenzo geldt dat voor alle x $\in$ A dat x $\leq$ r, omdat r ook een bovengrens is van A. Omdat zowel r als s een bovengrens van A zijn, geldt dat s $\leq$ r omdat $s = \sup A$. Bovendien geldt, omdat $r = \sup A$ dat r $\leq$ s. Dan volgt uit de definitie van orderelaties dat r = s. Maar dit is in tegenspraak met ons gegeven. Hieruit kunnen we besluiten dat $\sup A$ uniek is. □

6.5 Oefening 8.1.6

Bewijs. Stel dat A een maximum heeft, zeg $a = \max A$. Dit betekent dat voor alle x $\in$ A geldt dat x $\leq$ a. Dan volgt uit de definitie van bovengrens dat a ook een bovengrens is voor A. Er rest ons te bewijzen dat a kleiner is dan elke andere bovengrens van A.
Neem b $\in$ X een andere bovengrens van A willekeurig. Dan geldt voor alle x $\in$ A dat x $\leq$ b. Omdat a $\in$ A geldt dan dat a $\leq$ b. Omdat b willekeurig gekozen was kunnen we besluiten dat indien $\max A$ bestaat, geldt dat $\max A = \sup A$. □

6.6 Oefening 8.1.9

We bewijzen dat $\inf\{A, B\} = A \cap B$.

Bewijs. Eerst bewijzen we dat $A \cap B$ een ondergrens is voor {A,B}.
Omdat A $\cap$ B $\subset$ A en A $\cap$ B $\subset$ B is A $\cap$ B deel van elk element van {A,B} en dus is A $\cap$ B een ondergrens voor {A,B}.
Kies nu T $\in P(X)$ een ondergrens voor {A,B} willekeurig. We bewijzen dat T $\subset$ A $\cap$ B.
Kies x $\in$ T willekeurig. Omdat T een ondergrens is voor {A,B} geldt dat T $\subset$ A en T $\subset$ B. Hieruit volgt dat x $\in$ A en x $\in$ B, dus dat x $\in$ A $\cap$ B. Omdat x

willekeurig was geldt dat T ⊂ A ∩ B, ofwel dat A ∩ B groter dan of gelijk is aan elke andere ondergrens van {A,B}.
Nu bewijzen we dat $\sup\{A, B\} = A \cup B$.
Eerst bewijzen we dat A ∪ B een bovengrens is voor {A,B}.
Omdat A ⊂ A ∪ B en B ⊂ A ∪ B is elk element van {A,B} deel van A ∪ B en dus is A ∪ B een bovengrens van {A,B}.
Kies nu T ∈ $P(X)$ een bovengrens van {A,B} willekeurig. Dan is x ∈ A of x ∈ B. Als x ∈ A is x zeker ook ∈ T, want T is een bovengrens. Als x ∈ B geldt evenzo dat x ∈ T. Omdat x ∈ A ∪ B willekeurig was geldt dat A ∪ B ⊂ T en omdat T ∈ $P(X)$ willekeurig gekozen was met T een bovengrens van {A,B} geldt dat A ∪ B kleiner dan of gelijk is aan elke andere bovengrens van {A,B} en dus is A ∪ B = $\sup\{A, B\}$. □

6.7 Oefening 8.2.1

(a) Voor het rekenkundig gemiddelde:
We weten dat $0 < x < y$. Dan is $2x < x + y < 2y$. Ofwel is $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.
Voor het meetkundig gemiddelde:
We vertrekken weer van het gegeven $0 < x < y$. Dan is $x^2 < xy < y^2$. Dus is $x < \sqrt{xy} < y$.
Voor het harmonisch gemiddelde:
We weten dat $x < y$. Dus $\frac{x}{y} < 1 < \frac{y}{x}$. Hieruit volgt dat $1 + \frac{x}{y} < 2 < 1 + \frac{y}{x}$. Anders geschreven wordt dit $x(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) < 2 < y(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$. Hieruit volgt dat $x < \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < y$.
(b)

Bewijs. Eerst bewijzen we dat het rekenkundig gemiddelde groter is dan het meetkundig gemiddelde.
Gegeven is dat x en y strikt positief zijn met $x < y$. Dan is $(x - y)^2$ strikt groter dan 0. Ofwel $0 < (x - y)^2$. Dan is $0 < x^2 - 2xy + y^2$. Dan is $4xy < x^2 + 2xy + y^2$. Ofwel is $4xy < (x + y)^2$. Hieruit volgt dat $2\sqrt{xy} < x + y$, ofwel dat $\sqrt{xy} < \frac{1}{2}(x + y)$.
Nu is het voldoende te bewijzen dat het meetkundig gemiddelde groter is dan het harmonisch gemiddelde.
We vertrekken weer van $0 < x < y$. Ofwel $0 < (x - y)^2$. Hieruit vinden we weer dat $4xy < x^2 + 2xy + y^2$. We kunnen dit herschrijven als $4xy < x^2y^2(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2})$. Dan is $4 < xy(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2})$, ofwel is $4 < xy(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})^2$. Dus is $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} < \sqrt{xy}$. Hieruit volgt dat het harmonisch gemiddelde strikt kleiner is dan het meetkundig gemiddelde, maar we hadden al bewezen dat het meetkundig gemiddelde strikt kleiner is dan het rekenkundig gemiddelde. Hiermee is onderdeel **(c)** ook bewezen. □

6.8 Oefening 8.2.2

Bewijs. Stel dat $(\mathbb{C}, +, ., \leq)$ een totaal geordend veld is. Dan geldt oftewel $0 < i$ oftewel $i < 0$.
Laten we eerst aannemen dat $0 < i$. Dan is $0 \cdot i < i \cdot i$ ofwel $0 < i^2$, maar $i^2 = -1$. Dan zou $0 < -1$, maar dit is in tegenspraak met de ordening van $\mathbb{C}$.
Dit betekent dat $i < 0$. Dan is $-i \cdot i < -i \cdot 0$. Hieruit volgt dat $-i^2 < 0$, ofwel $1 < 0$, maar dit is in tegenspraak met de eigenschap van een veld dat $0 < 1$.
Hieruit volgt dat $(\mathbb{C}, +, ., \leq)$ geen totaal geordend veld is. $\square$

6.9 Oefening 8.2.3

(a)

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{F}$ willekeurig. Dan is $0 \cdot x$ te schrijven als $(0 + 0) \cdot x$. Ofwel, wegens de distributiviteits eigenschap krijgen we $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$. Dan krijgen we $0 \cdot x - 0 \cdot x = 0 \cdot x$. Dan is $0 \cdot x = 0$. $\square$

(b)

Bewijs. Neem $x \in \mathbb{F}$ willekeurig. We weten uit de eigenschappen van de optelling dat $x + (-x) = 0$. Hieruit volgt dat $-x = 0 - x$. Bovendien weten we uit (a) dat $0 = 0 \cdot x$. Dan kunnen we de gelijkheid herschrijven als $-x = 0 \cdot x - x$. Als we in het rechterlid de x afzonderen krijgen we $-x = (0 - 1) \cdot x$. Uit de eigenschappen van de optelling volgt dat $0 - 1 = -1$ dus volgt dat $-x = -1 \cdot x$. $\square$

(c)

Bewijs. Neem $x, y \in \mathbb{F}$ met $x \neq 0$ en $y \neq 0$ willekeurig.
Stel dat $xy = 0$. Dan is $y = 0 \cdot \frac{1}{x}$ of $x = 0 \cdot \frac{1}{y}$. Als $y = 0 \cdot \frac{1}{x}$ dan volgt uit **(a)** dat $y = 0$, maar dit in tegenspraak met het gegeven dat $y \neq 0$. Dus moet $x = 0 \cdot \frac{1}{y}$. Dan volgt nogmaals uit **(a)** dat $x = 0$, maar ook dit is in tegenspraak met het gegeven. Uit beide tegenspraken volgt dat als $x \neq 0$ en $y \neq 0$, $xy \neq 0$. $\square$

6.10 Oefening 8.3.4

Gegeven is dat $b \in \mathbb{Q}$ en $b > 0$.
(a)

Bewijs. We weten dat $b^2 > 2$ en $c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{b}$.
Eerst bewijzen we dat $c < b$. We vertrekken van $2 < b^2$. Hieruit volgt dat $\frac{1}{b} < \frac{1}{2}b$. Dan is $\frac{1}{2}b < b - \frac{1}{b}$, ofwel is $\frac{1}{2}b + \frac{1}{b} < b$. Omdat $c = \frac{1}{2}b + \frac{1}{b}$ volgt dus dat $c < b$.
Voor $c^2 > 2$ moeten we c eerst herschrijven als $c = \frac{1}{2}(b + \frac{2}{b})$. In oefening 8.2.1

hebben we dit gedefinieerd als het rekenkundig gemiddelde. In het bijzonder hebben we bewezen dat dit strikt groter is dan het meetkundig gemiddelde. Dus $\frac{1}{2}(b+\frac{2}{b}) > \sqrt{b \cdot \frac{2}{b}}$. Hieruit volgt dat $c > \sqrt{2}$, ofwel $c^2 > 2$. □

(b)

Bewijs. Eerst bewijzen we dat $c > b$. We vertrekken van $b^2 < 2$. Dan is $b^3 < 2b$. Dus is $b^3 + 2b < 4b$. Dit kunnen we herschrijven als $b(2+b^2) < 4b$, ofwel is $b < \frac{4b}{2+b^2} = c$.
Nu bewijzen we dat $c^2 < 2$. We weten dat $b^2 < 2$, dus $0 < (b^2-2)^2$. Ofwel is $0 < b^4 - 4b^2 + 4$. Dan is $0 < 2b^4 - 8b^2 + 8$. Dus is $16b^2 < 2b^4 + 8b^2 + 8$. Dit is te schrijven als $16b^2 < 2(b^4 + 4b^2 + 8)$ ofwel $\frac{16b^2}{(b^2+2)^2} < 2$. Hieruit volgt dat $c^2 < 2$. □

6.11 Oefening 8.3.8

Bewijs. Elke veeltermvergelijking f is te schrijven als

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

en bestaat dus uit aftelbaar veel termen.
De verzameling van alle veeltermvergelijkingen is dan te schrijven als

$$F = \bigcup_i^n f_i$$

en is dus een aftelbare unie van aftelbaar veel vergelijkingen. Bovendien heeft elke vergelijking maximaal n oplossingen. Ofwel $|O_f| \leq n$.
Hieruit volgt dat de verzameling van alle algebraïsche getallen bestaat uit de aftelbare unie van een aftelbare unie van aftelbaar veel vergelijkingen met aftelbaar veel oplossingen. En dit is een aftelbare verzameling. □

7 Hoofdstuk 9: De Reële Getallen

7.1 Oefening 9.1.1

De archimedische eigenschap zegt dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ een $n \in \mathbb{N}$ bestaat met $x < n$.
(a)

Bewijs. Kies a,b $\in \mathbb{R}$ met $a > 0$ willekeurig. Dan is $\frac{b}{a} \in \mathbb{R}$. Dan volgt uit de archimedische eigenschap dat er een $n \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$\frac{b}{a} < n$$

Dan geldt omdat $a > 0$ dat $b < an$ en omdat a,b $\in \mathbb{R}$ willekeurig waren is hiermee de stelling bewezen. $\square$

(b)

Bewijs. Kies a $\in \mathbb{R}$ met $a > 0$ willekeurig. Dan geldt dat $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt dat er een n $\in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$\frac{1}{a} < n$$

Dan volgt uit de eigenschappen van ongelijkheiden en omdat $a > 0$ dat

$$a > \frac{1}{n}$$

En omdat a $\in \mathbb{R}$ willekeurig gekozen was is hiermee de stelling bewezen. $\square$

7.2 Oefening 9.1.2

Uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel dat $a < b$ en dat er slechts een eindig aantal rationale getallen (zeg n) in $]a, b[$ zitten. Dan is $a < q_1 < q_2 < \ldots < q_n < b$ met bijvoorbeeld $\mathbb{Q} \cap]a, q_1[= \emptyset$. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat voor $a < b$ er een oneindig aantal rationale getallen in het interval $]a, b[$ zitten.

$\square$

(Het bewijs voor rationale getallen is volledig analoog.)

7.3 Oefening 9.1.4

Uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel dat I een onbegrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, maar dat $I \subset \mathbb{R}$. Dit betekent dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat waarvoor geldt dat $x \notin I$. Omdat I onbegrensd is geldt dat er een $y \in I$ bestaat zodat $x < y$, want anders zou x een bovengrens zijn voor I. Evenzo bestaat er een $z \in I$ zodat $z < x$, want anders was x een ondergrens. Maar omdat $y, z \in I$ en $z < x$ en $x < y$ volgt dat $z < x < y$. Dan volgt uit de definitie van intervallen dat $x \in I$, maar dit is een contradictie. Hieruit volgt dat als I een onbegrensde deelverzameling is van $\mathbb{R}$ volgt dat $I = \mathbb{R}$. $\square$

7.4 Oefening 9.1.5

Bewijs. We bewijzen dat er een irrationaal getal ligt in $]a, b[$.
Kies $c \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$ willekeurig, kies vervolgens $d \in]c, b[\cap \mathbb{Q}$ ook willekeurig. Dit kan omwille van de dichtheid van $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Dan hebben we dat $a < c < d < b$ en dus dat $]c, d[\subset]a, b[$. Bovendien zijn c en d rationaal. Het is nu voldoende een irrationaal getal f $\in]c, d[$ te vinden.
Beschouw $f = c + \frac{\sqrt{2}}{2}(d - c)$, dan geldt dat $f \in]c, d[$ omdat $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]0, 1[$. Bovendien geldt dat $f \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ omdat $c, d \in \mathbb{Q}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

7.5 Oefening 9.1.6

Weeral twee alternatieve bewijzen.

Bewijs. Voor alle $X, Y \in \mathbb{R}_0$ geldt dat $-2XY \geq -2|X||Y|$. Dan geldt ook dat

$$X^2 - 2XY + Y^2 \geq |X|^2 - 2|X||Y| + |Y|^2$$

Dit is te schrijven als

$$(X - Y)^2 \geq (|X| - |Y|)^2$$

Wegens de eigenschap van kwadraten geldt dan dat

$$|X - Y| \geq ||X| - |Y||$$

□

Bewijs. De driehoeksongelijkheid zegt dat: $|a + b| \leq |a| + |b|$.
Neem $a = X - Y$ en $b = Y$. Dan is $|(X - Y) + Y| \leq |X - Y| + Y$. Ofwel is $|X| \leq |X - Y| + |Y|$. Dan geldt dat $|X| - |Y| \leq |X - Y|$. Wegens de definitie van absolute waarde is $||X| - |Y|| \leq |X - Y|$ dan ook geldig. □

7.6 Oefening 9.1.7

Bewijs. Neem $(\mathbb{F}, +, ., \leq)$ een totaal geordend veld met de supremumeigenschap. Dan geldt voor elke verzameling $A \subset \mathbb{F}$ dat er een $x \in \mathbb{F}$ bestaat waarvoor geldt dat voor elke $a \in A$ $a \leq x$.
Neem nu de verzameling $B \subset \mathbb{F}$ gedefinieerd als

$$B := -A = \{-a | a \in A\}$$

Dan is B zeker niet leeg en bovendien geldt door bewijs 9.2.2 dat B naar onder begrensd is door $-\sup A = \inf B$. Dus B heeft een infimum in $\mathbb{F}$ en omdat $A \subset \mathbb{F}$ willekeurig was geldt dit voor elke verzameling in $\mathbb{F}$. □

7.7 Oefening 9.2.2

Bewijs. Omdat A naar boven begrens is heeft A een bovengrens en vanwege de volledigheid van $\mathbb{R}$ ook een supremum. Zij $a = \sup A$. Kies dan $x \in -A$ willekeurig, dan is $-x \in A$, zodat $-x \leq a$. Dan geldt wegens de definitie van ongelijkheden dat $x \geq -a$. Omdat $x \in A$ willekeurig gekozen was volgt hieruit dat $-a$ een ondergrens is voor $-A$.
Dus $-A$ is naar onder begrens en

$$\inf -A \geq -a = -\sup A$$

Nu bewijzen we dat $\inf -A \leq -\sup A$. Zij weer $a = \sup A$. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is $a - \epsilon$ geen bovengrens voor A. Er is dus een $x \in A$ met $x > a - \epsilon$. Dan is $-x < \epsilon - a$. Omdat $-x \in -A$ geldt $-x \geq \inf -A$. Er volgt nu dat $\epsilon - a > \inf -A$ en dus $-a > \inf -A - \epsilon$. Omdat $\epsilon > 0$ willekeurig was is nu bewezen dat

$$\forall \epsilon > 0 : -a > \inf -A - \epsilon$$

Dan is $-a \geq \inf -A$ en dus is $\inf -A \leq -\sup A$.
Omdat beide ongelijkheden geldt nu dat

$$\inf -A = -\sup A$$

□

7.8 Oefening 9.2.3

Bewijs. Kies $y \in \lambda A$ willekeurig. We bewijzen dat $y \leq \lambda \sup A$.
Omdat $y \in \lambda A$ bestaat er een $x \in A$ zodat $y = \lambda x$. Omdat $x \in A$ en omdat $\sup A$ een bovengrens is voor A geldt $x \leq \sup A$. Omdat $\lambda > 0$ geldt dan $\lambda x \leq \lambda \sup A$. Omdat $y = \lambda x \in A$ willekeurig gekozen was geldt dat $y \leq \lambda \sup A$ voor alle $y \in \lambda A$. Hieruit volgt dat $\lambda \sup A$ een bovengrens is voor λA.
We bewijzen nu dat $\lambda \sup A$ de kleinste bovengrens van λA is. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is $\lambda \sup A - \epsilon < \lambda \sup A$. Het is voldoende aan te tonen dat $\lambda \sup A - \epsilon$ geen bovengrens is voor λA. Omdat $\sup A$ de kleinste bovengrens is voor A is $\sup A - \frac{\epsilon}{\lambda} < \sup A$ geen bovengrens voor A. Er bestaat dus een $x \in A$ waarvoor $x > \sup A - \frac{\epsilon}{\lambda}$. Omdat $\lambda > 0$ volgt dat $\lambda x > \lambda \sup A - \epsilon$. Omdat $x \in A$ is $\lambda x \in \lambda A$ en omdat $\lambda x > \lambda \sup A - \epsilon$ volgt dat $\lambda \sup A - \epsilon$ geen bovengrens is voor λA, wat we moesten bewijzen. □

7.9 Oefening 9.2.4

Bewijs. Zij $a = \sup A$ en $b = \sup B$. Kies $x \in A$ en $y \in B$ willekeurig. Dan geldt dat $(x + y) \in (A + B)$. We bewijzen eerst dat $x + y \leq \sup A + \sup B$.
Omdat $a = \sup A$ geldt dat $x \leq a$ en analoog geldt dat $y \leq b$. Uit de definitie van ongelijkheden volgt dan dat $x+y \leq a+b$. Omdat x en y willekeurig gekozen waren volgt hieruit dat $a + b$ een bovengrens is voor $(A + B)$.
Nu bewijzen we dat $a + b$ de kleinste bovengrens is voor $(A + B)$.

Kies $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan geldt dat $(a+b) - \epsilon < a + b$. Het is voldoende aan te tonen dat $(a+b) - \epsilon$ geen bovengrens is voor $(A+B)$.
Omdat $a = \sup A$ geldt dat a de kleinste bovengrens is van A. Hieruit volgt dat $a - \frac{\epsilon}{2} < a$ geen bovengrens is van A. Er bestaat dus een $x \in A$ waarvoor geldt dat $a - \frac{\epsilon}{2} < x$. Analoog geldt, omdat $b = \sup B$ dat er een y bestaat in B zodat $b - \frac{\epsilon}{2} < y$, zodat $b - \frac{\epsilon}{2}$ geen bovengrens is voor B. Uit de definitie van ongelijkheden volgt dan dat $a - \frac{\epsilon}{2} + b - \frac{\epsilon}{2} < x + y$ ofwel dat $(a+b) - \epsilon < x + y$ zodat $(a+b) - \epsilon$ geen bovengrens is voor $(A+B)$ wat we moesten aantonen.
□

8 Hoofdstuk 10: Reële rijen van getallen

8.1 Oefening 10.2.2

(a)

Bewijs. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig en neem $n_0 \in \mathbb{N}$ met $n_0 = \lfloor 4\epsilon^{-2} \rfloor + 1$. Kies vervolgens $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt dat $n > \lfloor 4\epsilon^{-2} \rfloor$ waardoor

$$\left| \frac{2}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

Dit geldt voor elke $n \geq n_0$. De limiet $L = 0$ is hiermee bewezen. □

(b)

Bewijs. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig en neem $n_0 \in \mathbb{N}$ met $n_0 = \lfloor 5\epsilon^{-1} \rfloor + 1$. Kies vervolgens $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt dat $n > \lfloor 5\epsilon^{-1} \rfloor$. Bovendien geldt

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| &= \left| \frac{3n+1-3n-6}{n+2} \right| \\ &= \left| \frac{-5}{n+2} \right| \\ &= \frac{5}{n+2} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{5}{n+2} < \frac{5}{n}$$

En omdat $n > \lfloor 5\epsilon^{-1} \rfloor$ geldt

$$\frac{5}{n} < \epsilon$$

Omdat $n \geq n_0$ willekeurig gekozen was is hiermee de limiet $L = 3$ bewezen. □

(c)

Bewijs. Kies $\epsilon > 0$ willekeurig en neem $n_0 \in \mathbb{N}$ met

$$n_0 \geq \max\{3, \lfloor 4\epsilon^{-1} \rfloor + 1\}$$

Kies vervolgens $n \geq n_0$ willekeurig. Dan is $n \geq 3$ en $n \geq \lfloor 4\epsilon^{-1} \rfloor + 1 > \lfloor 4\epsilon^{-1} \rfloor$. Omdat $n \geq 3$ gelden de ongelijkheden $n^2 + 3n \leq 2n^2$ en $n^3 - 2 \geq \frac{1}{2}n^3$. Bijgevolg is

$$\left| \frac{n^2 + 3n}{n^3 - 2} - 0 \right| = \frac{n^2 + 3n}{n^3 - 2} \leq \frac{2n^2}{\frac{1}{2}n^3} = \frac{4}{n}$$

Omdat $n > \lfloor 4\epsilon^{-1} \rfloor$ geldt dat $\frac{4}{n} < \epsilon$ dus

$$\left| \frac{n^2 + 3n}{n^3 - 2} - 0 \right| < \epsilon$$

Dit geldt voor elke $n \geq n_0$. De limiet $L = 0$ is hiermee bewezen. □

8.2 Oefening 10.2.3

(a)
Uit het ongerijmde.

Bewijs. Stel dat we een limiet zouden kunnen vinden, dus dat (a_n) wel convergent zou zijn, zeg $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Dan is $|a_n - L| < \epsilon$ voor $n \geq n_0$, maar $a_n = \pm 1$. Dus $|1 - L| < \epsilon$ of $|-1 - L| < \epsilon$. Dit tweede kan herschreven worden als $|-(1 + L)| < \epsilon$. Volgens de definitie van absolute waarde is dit gelijk aan $|1 + L| < \epsilon$. Dus zowel $|1 - L|$ als $|1 + L|$ moeten strikt kleiner zijn dan ϵ. Neem $\epsilon = 1$, dan is ofwel $|1 - L|$ of $|1 + L|$ strikt groter dan ϵ. Dit is echter een contradictie, dus (a_n) is divergent. □

8.3 Oefening 10.2.4

(b) Fout.
Neem $a_n = (-1)^n$. Dan is $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ maar (a_n) heeft geen limiet.
(c) Juist.
Uit de definitie van limiet volgt dat als (a_n) naar 0 convergeert $|a_n - 0| < \epsilon$. Hetzelfde geldt voor $(|a_n|)$. Stel dat (a_n) naar 0 convergeert. Dan geldt dat $|a_n - 0| = ||a_n| - 0|$ ofwel $|a_n| = ||a_n||$. Dit is triviaal.

8.4 Oefening 10.2.6

(a)

Bewijs. We weten dat (a_n) naar L convergeert, dus dat $|a_n - L| < \epsilon$ voor alle $n \geq n_0$ voor een zekere $n_0 \in \mathbb{N}$. Dan geldt voor zekere $k \in \mathbb{N}$ dat $n + k \geq n \geq n_0$, dus dat $|a_{n+k} - L| < \epsilon$. Dan volgt uit de definitie dat $|b_n - L| < \epsilon$. □

8.5 Oefening 10.3.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Bewijs. Basisstap Voor k = 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
We nemen aan dat de limiet klopt voor alle $k \geq 1$. We bewijzen dat ze klopt voor $k+1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k}\frac{1}{n}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = 0 \cdot 0 = 0$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn geldt dat $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$. $\square$

8.6 Oefening 10.3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 + 2n + 1}{3n^3 - n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}}{\frac{3}{n} - 1} = -2$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{n+1}{n}}}$$
$$= \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

8.7 Oefening 10.3.5

(a) Na het uitrekenen van een aantal waarden zien we snel dat (a_n) naar 3 convergeert.
(b)

Bewijs. (a_n) is convergent met $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. We bewijzen dat $L \neq 0$ per volledige inductie.

Basisstap
$a_0 > 0$, dit is gegeven. Hiermee is de basisstap bewezen.
Inductiestap
Stel nu dat $a_n > 0$ voor alle $n > 0$. We bewijzen dat $a_{n+1} > 0$.
We weten dat

$$a_{n+1} = 1 + \frac{6}{a_n}$$

maar $a_n > 0$, dus hieruit volgt dat a_{n+1} ook strikt groter is dan 0. Hiermee is de inductiestap bewezen.
Conclusie
Omdat de basisstap en de inductiestap zijn bewezen kunnen we besluiten dat $L > 0$, waaruit volgt dat $L \neq 0$, wat we moesten bewijzen.

We weten nu dat (a_n) convergeert naar $L > 0$. Dus is $|a_n - L| < \epsilon$ voor alle $n \geq n_0$ voor een zekere $n_0 \in \mathbb{N}$. Dan geldt dit zeker ook voor a_{n+1} aangezien $n+1 > n \geq n_0$. Dus $|a_{n+1} - L| < \epsilon$ voor alle $n+1 > n \geq n_0$, waaruit volgt dat a_{n+1} ook convergeert naar L. Hieruit volgt dat $L = 1 + \frac{6}{L}$.
Nu berekenen we L. We weten dat $L = 1 + \frac{6}{L}$. Dan is $L - \frac{6}{L} = 1$. Ofwel is $L^2 - 6 = L$. Hieruit vinden we de vierkantsvergelijking $L^2 - L - 6 = 0$. Deze heeft als oplossingen $L = -2$ en $L = 3$, maar we hebben al bewezen dat $L > 0$. Hieruit volgt dat $L = 3$. $\square$

9 Hoofdstuk 11: Monotone rijen en Cauchyrijen

9.1 Oefening 11.1.2

(a)

$$a_n = \frac{q^n}{n!}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{n-1} = \frac{q^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{q}{n}\frac{q^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{q(q^{n-1})}{n(n-1)!} = \frac{q^n}{n!} = a_n$$

Neem $N = \lfloor q \rfloor$. Dan geldt $N \in \mathbb{N}$ en $N + 1 > q$. We bewijzen dat (a_n) strikt dalend is.
Kies dus $n \geq N$ willekeurig. We moeten bewijzen dat $a_n > a_{n+1}$. We weten dat $a_{n+1} = \frac{q}{n+1}a_n$. Omdat $n \geq N$ en $N + 1 > q$ geldt dat $n + 1 > q$ en dus is $\frac{q}{n+1} < 1$. Bijgevolg is $a_{n+1} < a_n$. Hieruit volgt dat (a_n) strikt dalend is, wat we moesten bewijzen.
(c)
Om te bewijzen dat de rij convergent is, is het voldoende te bewijzen dat er een

ondergrens bestaat voor (a_n). Stel als ondergrens voor (a_n) 0. Dit is een goede ondergrens, omdat $q > 0$ geldt dat alle $a_n > 0$, dus 0 is een ondergrens. Dan volgt uit stelling 11.1.2 dat (a_n) convergent is.

(d)

We weten reeds dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent is, zeg naar $L \in \mathbb{R}$. De rij $(a_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert dan ook naar L. Bovendien weten we dat $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ naar 0 convergeert. Uit de rekenregels voor limieten volgt nu dat $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$ en hieruit volgt dat $L = O \cdot L = 0$.

9.2 Oefening 11.2.1

Bewijs. Zij (a_n) een niet lege reële begrensde rij. Dan zijn $\liminf_{n\to\infty} a_n$ en $\limsup_{n\to\infty} a_n$ als volgt gedefinieerd

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_m | m \geq n\}$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_m | m \geq n\}$$

We nemen $A_n = \{a_m | m \geq n\}$. Dan volgt uit de definitie van infimum en supremum dat $\inf A_n \leq \sup A_n$. We nemen $i_n = \inf A_n$ en $s_n = \sup A_n$. Dan is $i_n \leq s_n$. Dan volgt uit stelling 10.4.3 dat

$$\lim_{n\to\infty} i_n \leq \lim_{n\to\infty} s_n$$

Dus is

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

□

9.3 Oefening 11.2.2

(a)

We weten dat $a_n \leq b_n$ voor alle $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Dan is

$$s_a = \sup\{a_m | m \geq n\} \text{ en } s_b = \sup\{b_m | m \geq n\}$$
$$i_a = \inf\{a_m | m \geq n\} \text{ en } i_b = \inf\{b_m | m \geq n\}$$

Omdat $a_n \leq b_n$ is $s_a \leq s_b$ en $i_a \leq i_b$.

9.4 Oefening 11.3.1

(a)

Bewijs. We nemen de rij $(\sqrt{n})_0^\infty$. Deze rij is zeker niet convergent, want ze gaat naar oneindig. Maar, we kunnen wel bewijzen dat het verschil tussen $\sqrt{n+1}$ en $\sqrt{n}$ willekeurig klein wordt.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

We schatten de breuk af door te zeggen dat

$$\begin{gathered}1 < 2 \\ \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}\end{gathered}$$

Neem nu $\epsilon \in \mathbb{R}$ met $\epsilon > 0$ willekeurig. Kies bovendien $n_0 \geq \lfloor \epsilon^{-2} \rfloor + 1$. Neem nu $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt dat $n \geq \lfloor \epsilon^{-2} \rfloor + 1 > \lfloor \epsilon^{-2} \rfloor$. Dan geldt dat

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

en omdat $n > \lfloor \epsilon^{-2} \rfloor$ volgt dan dat

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

Hieruit volgt dat het verschil tussen a_{n+1} en a_n willekeurig klein wordt, maar (a_n) convergeert niet en is dus geen Cauchy rij. $\square$

(b)

Bewijs. We nemen de rij (a_n) die als volgt gedefinieerd is

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \frac{1}{n} \text{ als } a_n \geq 1 \text{ of } (0 < a_n < 1 \text{ en } a_{n-1} < a_n) \\ \\ a_n + \frac{1}{n} \text{ als } a_n \leq 0 \text{ of } (0 < a_n < 1 \text{ en } a_{n-1} > a_n) \end{cases}$$

met $a_0 = 0$.
Deze rij is duidelijk begrensd, want de termen liggen strikt tussen bijvoorbeeld -1 en 2. Bovendien geldt dat het verschil tussen a_{n+1} en a_n gelijk is aan $\frac{1}{n}$. Kies nu $\epsilon \in \mathbb{R}$ met $\epsilon > 0$ willekeurig. Neem dan $n_0 \geq \epsilon^{-1} + 1$. Kies $n \geq n_0$ willekeurig. Dan geldt dat $n \geq \epsilon^{-1} + 1 > \epsilon^{-1}$. Dus is

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

Dus hebben we een begrensde rij gevonden waarvoor geldt dat $|a_{n+1} - a_n| < \epsilon$ maar waarvoor geldt dat ze niet Cauchy is. $\square$

9.5 Oefening 11.3.2

Uit de driekhoeksongelijkheid en het gegeven volgt (omdat $m \geq n \geq n_0$)

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq c^{m-n-1}|a_{n+1} - a_n| + c^{m-n-2}|a_{n+1} - a_n| + \ldots + c|a_{n+1} - a_n| + |a_{n+1} - a_n| \\
&= (1 + c + c^2 + \ldots + c^{m-n-2} + c^{m-n-1})|a_{n+1} - a_n| \\
&\leq (1 + c + c^2 + \ldots)|a_{n+1} - a_n| \\
&= (\sum_{k=0}^{\infty} c^k)|a_{n+1} - a_n| \\
&= \frac{1}{1-c}|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{c^{n-n_0}}{1-c}|a_{n_0+1} - a_{n_0}| \\
&= \frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \epsilon
\end{aligned}$$

We moeten dus bewijzen dat

$$\frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \epsilon$$

voor een zekere $n_1 \in \mathbb{N}$.

Omdat $c \in [0, 1[$ zal $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \epsilon &\Leftrightarrow c^n < \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0} - a_n|} \\
&\Leftrightarrow n > \log_c \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0} - a_n|}
\end{aligned}$$

Bewijs. Kies $n_1 \geq \max\left\{\left\lfloor \log_c \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0}-a_n|} \right\rfloor + 1, n_0\right\}$. Kies nu $n \geq n_1$ willekeurig. Dan geldt dat $n \geq \left\lfloor \log_c \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0}-a_n|} \right\rfloor + 1 > \left\lfloor \log_c \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0}-a_n|} \right\rfloor$ en $n \geq n_0$. Omdat $n \geq n_0$ en vanwege de driehoeksongelijkheid en het gegeven kunnen we $|a_m - a_n|$ herschrijven als

$$|a_m - a_n| \leq \frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}|$$

Bovendien, omdat $n > \left\lfloor \log_c \frac{\epsilon(1-c)c^{n_0}}{|a_{n_0}-a_n|} \right\rfloor$ geldt dat

$$\frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}| < \epsilon$$

En omdat

$$|a_m - a_n| \leq \frac{c^n}{(1-c)c^{n_0}}|a_{n_0+1} - a_{n_0}|$$

volgt hieruit dat (a_n) een Cauchyrij is. □

10 Hoofdstuk 12: Divergente rijen en recursief gedefinieerde rijen

10.1 Oefening 12.1.3

(a) Juist
(b) Fout
(c) Fout
(d) Juist

10.2 Oefening 12.1.5

Bewijs. We bewijzen dat de rij $(a_n + b_n)$ divergeert naar $+\infty$.
Kies dus $M \in \mathbb{R}$ willekeurig. Omdat de rij (b_n) naar onder begrensd is, bestaat er een $L \in \mathbb{R}$ zodat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat $b_n \geq L$. Omdat de rij (a_n) divergeert naar $+\infty$, bestaat er een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat voor elke $n \geq n_0$ geldt dat $a_n \geq M - L$. Kies nu $n \geq n_0$ willekeurig. Dan zal $b_n \geq L$ en $a_n \geq M - L$ en dus zal $a_n + b_n \geq M$. □

10.3 Oefening 12.1.6

(a_n)	(b_n)	$\frac{a_n}{b_n}$
(n)	$(-n)$	$(-1) \to -1$
(n)	$(-\sqrt{n})$	$(-\sqrt{n}) \to +\infty$
(n)	$(-n^2)$	$(\frac{-1}{n}) \to 0$
$(n \cdot ((-1)^n + 2))$	$(-n)$	$((-1)^n + 2) \to$ Geen limiet

10.4 Oefening 12.1.7

(a) Bepaald. $+\infty$
(b) Onbepaald.
Neem $(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$, de limiet hiervan is 1. Neem $(b_n) = n$, de limiet hiervan is $+\infty$. $(a_n)^{(b_n)} = (1 + \frac{1}{n})^n = e$.
Neem nu $(a_n) = 1$ en $(b_n) = n$. De limieten zijn respectievelijk 1 en $+\infty$. $(a_n)^{(b_n)} = 1$.
Omdat we twee verschillende uitkomsten krijgen voor 1^∞ kunnen we besluiten dat het een onbepaalde vorm is.
(c) Bepaald. 0

10.5 Oefening 12.2.1

Eerst bewijzen we dat $F(x)$ goed gedefinieerd is. Dit wilt zeggen dat $F(x) \in [1, 2]$ voor alle $x \in [1, 2]$.
Er geldt dat $F(x)$ strikt dalend is in het interval $[1, 2]$. Bovendien geldt voor $x = 1$ dat $F(x) = \frac{3}{2} \in [1, 2]$ en voor $x = 2$ is $F(x) = \frac{4}{3} \in [1, 2]$. Alle waarden

van $F(x)$ voor $x \in [1,2]$ liggen dus tussen $\frac{3}{2}$ en $\frac{4}{3}$ en zijn dus element van $[1,2]$. Hieruit volgt dat $F(x)$ goed gedefinieerd is.
Nu zoeken we c waarvoor geldt dat

$$|F(x) - F(y)| \leq c|x - y|$$

In sectie 12.2.4 staat dat voor een contractie c gelijk is aan

$$c = \max_{x \in X} |F^{'}(x)| < 1$$

We zoeken dus wat de maximale waarde van $|F^{'}(x)|$ is zodat $|F^{'}(x)| < 1$. Eerst berekenen we $|F^{'}(x)|$.

$$\begin{aligned} |F^{'}(x)| &= \left| \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{'} \right| \\ &= \left| \frac{(x+2)^{'}(x+1) - (x+2)(x+1)^{'}}{(x+1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{(x+1)^2} \right| \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

De laatste stap is toegestaan, want $(x+1)^2 > 0$ voor alle $x \in [1,2]$.
We zoeken nu dus de x waarvoor geldt dat

$$c = \max_{x \in X} \frac{1}{(x+1)^2} < 1$$

Dus, de x waarvoor $(x+1)^2$ zo klein mogelijk is. Dit is natuurlijk $x = 1$, waarvoor $(x+1)^2 = 4$. Hieruit volgt dat $c = \frac{1}{4}$.
Nu bepalen we het vaste punt van $F(x)$. x^* is een vast punt van $F(x)$ als $F(x*) = x*$. Dus als

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+1} &= x \\ x + 2 &= x^2 + x \\ x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

De enige twee reële oplossingen hiervoor zijn $x = \pm\sqrt{2}$. Omdat $-\sqrt{2} \notin [1,2]$ is $\sqrt{2} \in [1,2]$ het enige vaste punt is.
$F(x)$ is dus een contractie op $[1,2]$ met

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{4}|x - y|$$

10.6 Oefening 12.2.2

(a)
We weten dat $F(x)$ een stijgende functie is.
Neem $x = 0$. Dan is $F(x) = \sqrt{c}$ en $\sqrt{c} \in [0, 1 + \sqrt{c}[$.
Als $x = 1+\sqrt{c}$ is $F(x) = \sqrt{1 + \sqrt{c} + c}$. We moeten bewijzen dat $\sqrt{1 + \sqrt{c} + c} \in [0, 1 + \sqrt{c}[$.

$$0 \leq \sqrt{1 + \sqrt{c} + c}$$

Dit is triviaal.

$$\sqrt{1 + \sqrt{c} + c} \leq 1 + \sqrt{c}$$
$$\Updownarrow$$
$$1 + \sqrt{c} + c \leq 1 + 2\sqrt{c} + c$$

En dit is natuurlijk ook triviaal.
Dan geldt, omdat $F(x)$ goed gedefinieerd is in de grenzen van het domein en strikt stijgend is, dat $F(x)$ goed gedefinieerd is.

(b)
Het vaste punt van de functie is wanneer $x = F(x)$. Ofwel wanneer $x = \sqrt{x + c}$. Dit kan herschreven worden als de vierkantsvergelijking $x^2 - x - c = 0$. Deze heeft als oplossingen

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

maar $x = \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2}$ is geen mogelijke oplossing, want dit is negatief, en er geldt dat $F(x) \geq 0$.
Het enige vaste punt van de functie is dus $x = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$.

(c)
Om te controleren of $F(x)$ een contractie is moeten zien dat $F(x)$ afleidbaar is in elk interval van het domein.

$$F^{'}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + c}}$$

omdat zowel x als c strikt positief zijn geldt zal $\sqrt{x + c} \neq 0$ en dus is $F(x)$ afleidbaar op elk interval van het domein.
Bovendien zien we dat voor $c \leq \frac{1}{4}$ zal $|F^{'}(x)| \geq 1$, waardoor $F(x)$ geen contractie is (zie 12.2.4).

(d)
Bekijk de functie $x \mapsto x - \sqrt{x + c}$, ofwel $x \mapsto x - F(x)$. De rij zal stijgend zijn als $a_{n+1} > a_n$. Het enige nulpunt van de functie is het vaste punt. Bewijs dat als je een startpunt links/rechts van het vaste punt kiest de functie zal stijgen/dalen naar het vaste punt.

11 Hoofdstuk 13: Deelrijen

11.1 Oefening 13.1.2

- $\limsup = 1$, $\liminf = -3$
- {limieten voor convergente deelrijen} = {ophopingspunten} = {1, -3}

11.2 Oefening 13.1.3

Bewijs. In oefening 9.1.2 hebben we aangetoond dat in elk interval $]a, b[$ met $a < b$ een oneindig aantal rationale getallen zit.
Kies $\epsilon \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan volgt hieruit dat de verzameling

$$\{[x - \epsilon, x + \epsilon]\} \cap \mathbb{Q}$$

een aftelbaar oneindig aantal elementen heeft. Hieruit volgt dat rond elke $x \in [0, 1[$ een oneindig aantal rationale getallen ligt. Dit betekent dat in elk interval $[x - \epsilon, x + \epsilon[$ een oneindig aantal elementen van de rij (a_n) zitten. Uit de definitie van ophopingspunten volgt dan dat elk getal $x \in [0, 1[$ een ophopingspunt van de rij (a_n) is. $\square$