

1. Bereken de oppervlakte van het gebied begrepen tussen de kromme bepaald door

$$y^2 = \frac{x^3}{4-x}$$

en zijn verticale asymptoot.

(2 ptn)

Antwoord: De kromme combineert de grafieken van de functies gegeven door

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{4-x}}$$

Deze functies zijn enkel gedefiniëerd voor $x \in [0, 4[$ en hebben als verticale asymptoot de rechte $x = 4$. De gezochte oppervlakte is dus begrepen tussen een kromme die symmetrisch is rond de x -as (respectievelijk de positieve en negatieve wortel $\pm \sqrt{\frac{x^3}{4-x}}$) en de rechte $x = 4$. Vandaar is dus de oppervlakte gegeven door (de factor 2 brengt de symmetrie in rekening)

$$2 \int_0^4 \sqrt{\frac{x^3}{4-x}} dx \equiv 2I$$

Nu is de integraal $I = \int_0^4 \sqrt{\frac{x^3}{4-x}} dx$ een oneigenlijke integraal. Uitrekenen via substitutie $4-x = t^2$ of dus $dx = -2t dt$ geeft

$$I = \int_0^4 \sqrt{\frac{x^3}{4-x}} dx = \int_2^0 -2(4-t^2)^{\frac{3}{2}} dt = 2 \int_0^2 (4-t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

Verdere substitutie met $t = 2\sin\theta$ levert

$$I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} 2\cos\theta d\theta = 2^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$

Deze laatste integraal is via gekende recursieformule te vinden als

$$I = 2^5 \left(\frac{\cos^3\theta \sin\theta}{4} + \frac{3}{8} \cos\theta \sin\theta + \frac{3}{8} \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

We vinden dus

$$I = 6\pi$$

en voor de gehele oppervlakte dan

$$2I = 12\pi$$

(in gekwadrateerde lengte-eenheden, 'square units')

2. Bepaal de totale massa van een (rechte) kegel met hoogte a cm, en straal van het cirkelvormige grondvlak gegeven door b cm, wanneer de dichtheid in elk punt gelijk is aan αz g/cm³, indien z de hoogte boven het grondvlak aangeeft (α is een gegeven constante).

Bepaal vervolgens de coördinaten van het massamiddelpunt van die kegel.

(2 ptn)

Antwoord:

We gebruiken de symmetrie rondom de z -as. Een elementair volume-element op hoogte z is een cilindervormig schijfje met straal $R(z)$ en volume $dV = \pi R^2(z) dz$. Gebruik gelijkvormige driehoeken om te besluiten dat $R(z) = \frac{b}{a}(a - z)$ (inderdaad is dan $R(0) = b$ en $R(a) = 0$). Een elementair massa-element is dan $dm = \alpha z dV$. Hieruit volgt dat de totale massa bekomen wordt door

$$m = \int_0^a dm = \int_0^a \alpha z \pi \frac{b^2}{a^2} (a - z)^2 dz$$

Uitrekenen (elementaire integraal van een veeltermfunctie) levert

$$m = \alpha \pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{z^4}{4} - 2a \frac{z^3}{3} + a^2 \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a$$

wat uitrekent tot

$$m = \frac{\alpha \pi a^2 b^2}{12} \text{ kg}$$

Voor het massamiddelpunt levert de symmetrie direct op dat $\bar{x} = 0 = \bar{y}$ en dat de hoogte van het massamiddelpunt berekend wordt door

$$\bar{z} = \frac{M_{z=0}}{m}$$

waarin $M_{z=0}$ het moment voorstelt bekomen door

$$M_{z=0} = \int_0^a z dm = \int_0^a z \alpha z \pi \frac{b^2}{a^2} (a - z)^2 dz$$

Opnieuw is er dus een integraal van een veelterm te berekenen, die uitrekent tot

$$M_{z=0} = \frac{\alpha \pi b^2 a^3}{30}$$

De z -coördinaat van het massamiddelpunt is dan

$$\bar{z} = \frac{\frac{\alpha \pi b^2 a^3}{30}}{\frac{\alpha \pi a^2 b^2}{12}} = \frac{2a}{5}$$

Het massamiddelpunt is dus bij $\bar{x} = 0 = \bar{y}$ en ligt op $\bar{z} = \frac{2a}{5}$ cm hoogte.