PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA:
vrijdag 23 november 2007

Naam: ....

Voornaam: ....

Richting + Reeks: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Enkel het net afgeven.

Veel succes!

---

1. (a) Zij V een vectorruimte. Leg uit wat een maximaal vrij deel is van V en bewijs dat een maximaal vrij deel steeds een basis is van V.

   (b) Zij $\mathcal{A} : V \to V$ een lineaire transformatie van een eindigdimensionale vectorruimte, en $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ twee basissen van V.

   Geef en bewijs de formule die de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\mathcal{E}'$ uitdrukt in termen van de matrix van $\mathcal{A}$ ten opzichte van $\mathcal{E}$ en de matrix van basisverandering van $\mathcal{E}$ naar $\mathcal{E}'$.

2. Zij V een 7-dimensionale vectorruimte.

   a) Beschouw in V twee deelruimten U en W waarvoor geldt dat $\dim(U) = \dim(W) = 5$. Toon aan dat er drie lineair onafhankelijke vectoren v_1, v_2 en v_3 in de doorsnede $U \cap W$ bestaan.

   b) Onderstel nu dat $\dim(U) = 4$ en verder nog steeds $\dim(W) = 5$. Geldt de bewering uit a) nog steeds? Zo ja, toon aan. Zo niet, geef een concreet tegenvoorbeeld.

3. Zij a en b reële parameters. Onder welke voorwaarden op a en b heeft onderstaand stelsel oneindig veel oplossingen? Geen oplossingen? Juist één oplossing? Geef in het laatste geval ook de oplossing van het stelsel.

$$\begin{cases} ax_1 & + & 2x_2 & = & 6 \\ 2x_1 & + & (a-b)x_2 & = & a-1 \end{cases}$$

4. Zij $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

   (a) Is K een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$?

   (b) Toon aan dat $< K >= \mathbb{R}^3$.