Proefexamen Kansrekenen I

25 maart 2016

Naam : Richting :

Lees volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Wie de vragen aanneemt en bekijkt, moet minstens 1 uur blijven zitten.
- Schrijf op het 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en op elk blad je naam).
- Je mag gebruik maken van niet-grafisch rekenmachine, formularium en statistische tabellen. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling, een binomiale kans moet herleid worden tot een kans onder een normale verdeling (indien CLS van toepassing is). Wanneer het nodige aantal vrijheidsgraden niet in de tabel staat, mag je gaan kijken bij het dichtstbijzijnde aantal dat wel in de tabel staat. Werk met 4 cijfers na de komma!
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen van je examen, geef je ook kladpapier af (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering).
- Let op
  - correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
  - fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
  - fout numeriek antwoord (bvb ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

  Toon dus DUIDELIJK aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt (telegramstijl is toegelaten). Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie zoals die in de leerstof is aangebracht. Verklaar nieuwe symbolen.
- Je hebt **2 uur** tijd om het examen op te lossen.

VEEL SUCCES !

Vraag 1 :

Twee urnes A en B bevatten elk 10 knikkers waarvan 5 witte en 5 zwarte knikkers. Er wordt willekeurig 1 knikker getrokken uit urne A en deze wordt toegevoegd aan urne B. Daarna wordt er willekeurig 1 knikker getrokken uit urne B en deze wordt toegevoegd aan urne A. Wat is de kans dat urne A nog steeds 5 witte en 5 zwarte knikkers bevat?

Oplossing: Stel

- C: urne A heeft 5 zwarte ballen na de wisseling.
- AZ: bal gekozen uit urne A is zwart
- BZ: bal gekozen uit urne B is zwart

Hieruit volgt:

$$C = (AZ \cap BZ) \cup (AZ^C \cap BZ^C).$$

En bijgevolg

$$P(C) = P(AZ \cap BZ) + P(AZ^C \cap BZ^C).$$

We weten

$$P(AZ \cap BZ) = P(AZ)P(BZ|AZ) = \frac{5}{10}\frac{6}{11}.$$

En analoog $P(AZ^C \cap BZ^C) = \frac{1}{2}\frac{6}{11}$, dus $P(C) = \frac{6}{11}$.

Vraag 2 :

Stel dat X de score is op een wiskundetest (tussen 0 en 1) en Y de score is op een muziektest (ook tussen 0 en 1). Stel dat voor studenten van de KU Leuven de scores X en Y de volgende gezamenlijke dichtheidsfunctie hebben

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(2x+3y) & 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

1. Bepaal de constante c.

Oplossing: We hebben dat

$$1 = c\int_0^1 \int_0^1 (2x+3y)\, dxdy$$

en daarom is $c = \frac{2}{5}$.

2. Gegeven dat een student 0.3 behaalde op de muziektest, wat is de kans dat de score op de wiskunde test groter zal zijn dan 0.8?

Oplossing: De marginale dichtheidsfunctie van Y is

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\,dx = \frac{2}{5}(1+3y),$$

$0 \leq y \leq 1$ en 0 elders. Bijgevolg, voor $0 \leq x \leq 1$, en $0 \leq y \leq 1$,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{2x+3y}{1+3y},$$

en 0 elders. Dit geeft

$$P\left(X > 0.8 | Y = 0.3\right) = \int_{0.8}^1 f_{X|Y}(x|y=3) = \int_{0.8}^1 \frac{2x+0.9}{1.9} dx = 0.284.$$

Vraag 3 :

De stochastische veranderlijke X heeft de volgende dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x+2)^3 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

1. Bepaal de momentgenererende functie van X.

Oplossing: De definitie van de MGF geeft

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{20}\int_{-1}^1 (x+2)^3 e^{tx}\,dx.$$

M.b.h.v. partiële integratie krijgen we dan

$$M_X(t) = \frac{1}{20t}\left(27e^t - e^{-t}\right) - \frac{3}{20t^2}\left(9e^t - e^{-t}\right) + \frac{6}{20t^3}\left(3e^t - e^{-t}\right) - \frac{6}{20t^4}\left(e^t - e^{-t}\right).$$

2. Veronderstel dat $X_1, \ldots, X_{80}$ onafhankelijk en gelijk verdeeld zijn met dezelfde verdeling als X, dus voor alle $i = 1, \ldots, 80$ geldt $f_{X_i}(x) = f_X(x)$. Bepaal de kans dat minstens 70 van deze 80 stochastische veranderlijken $X_1, \ldots, X_{80}$ positief zijn.

Oplossing: Gebruikmakend van de dichtheidsfunctie vinden we dat

$$P(X \leq 0) = F_X(0) = \frac{1}{20}\int_{-1}^0 (z+2)^3 dz = \frac{3}{16}.$$

We definiëren

$$A_i = \begin{cases} X_i > 0 & \text{met kans } \frac{13}{16} \\ X_i \leq 0 & \text{met kans } \frac{3}{16} \end{cases}$$

en

$$Y = \sum_{i=1}^{80} A_i \sim \mathcal{B}(n = 80, p = 13/16).$$

We kunnen dan Y benaderen m.b.v. de CLS:

$$Y \approx Y_2 \sim \mathcal{N}\left(80\frac{13}{16}, 80\frac{13}{16}\frac{3}{16}\right) = \mathcal{N}(65, 12.1875)$$

want $n = 80 > 30$, $np = 65 > 5$ en $n(1-p) = 15 > 5$. Dan is

$$\begin{aligned} P(Y \geq 70) &\approx 1 - P(Y_2 \leq 69.5) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{69.5 - 65}{\sqrt{12.1875}}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.289) = 1 - 0.901 = 0.099, \end{aligned}$$

waarbij de continuïteitscorrectie gebruikt is.