Tussentijdse toets: Kansrekenen I

18 mei 2017

Naam : Richting :

Lees volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Schrijf op het 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en op elk blad je naam).
- Je mag gebruik maken van niet-grafisch rekenmachine, formularium en statistische tabellen. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling, een binomiale kans moet herleid worden tot een kans onder een normale verdeling (indien CLS van toepassing is). Wanneer het nodige aantal vrijheidsgraden niet in de tabel staat, mag je gaan kijken bij het dichtstbijzijnde aantal dat wel in de tabel staat. Werk met 4 cijfers na de komma!
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen, geef je ook kladpapier af (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering).
- Let op
  - correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
  - fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
  - fout numeriek antwoord (bvb ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

  Toon dus DUIDELIJK aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt (telegramstijl is toegelaten). Gebruik zoveel mogelijk de wiskundige notatie zoals die in de leerstof is aangebracht. Verklaar nieuwe symbolen.
- Je hebt **1 uur** tijd om de toets op te lossen.

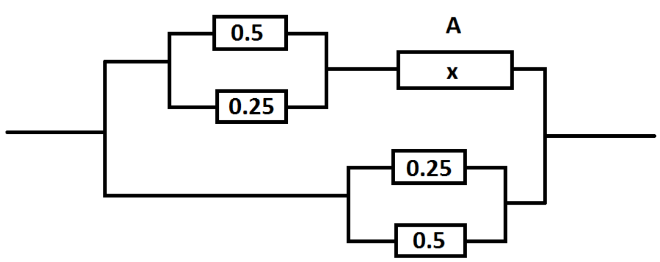
VEEL SUCCES !

1. Geef de volledige stelling over de ongelijkheid van Chebyshev.

Oplossing: Zij X een s.v. en $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zodanig dat $\phi(X)$ een s.v. is en $\mathrm{E}[\phi(X)]$ bestaat.

1. Indien $\phi \geqslant 0$, even (d.w.z. $\forall x : \phi(-x) = \phi(x)$) en niet-dalend voor $x \geqslant 0$, dan geldt
$$\forall a \geqslant 0 : \Pr(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{\phi(a)}\mathrm{E}[\phi(X)].$$
2. Indien $\phi \geqslant 0$ en niet-dalend voor $-\infty < x < +\infty$, dan geldt
$$\forall a \in \mathbb{R} : \Pr(X \geqslant a) \leqslant \frac{1}{\phi(a)}\mathrm{E}[\phi(X)].$$

2. Beschouw het volgende systeem. De faalkans van elke component is gegeven op de figuur. De faalkans van component A is ongekend en voorgesteld als x. Als het systeem faalt, faalt component A met kans 10%. Bepaal de kans dat component A faalt. Schrijf je redenering en berekeningen nauwkeurig uit en geef aan welke kansregels uit de cursus je gebruikt om tot een antwoord te komen. Je mag veronderstellen dat componenten onafhankelijk van elkaar falen.



Oplossing: Stel A de gebeurtenis dat component A faalt en S de gebeurtenis dat het hele systeem faalt. We weten dat $P(A|S) = 0.1$. Bovendien is $P(S|A) = 0.25 \times 0.5 = 0.125$ en $P(S|A^C) = (0.25 \times 0.5)^2 = 0.015625$. Wegens de regel van Bayes is
$$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|A^C)P(A^C)}.$$
Alles invullen geeft
$$0.1 = \frac{0.125x}{0.125x + 0.015625(1-x)}$$
Dus $x = 1/73 = 0.01369863$.

3. De stochastische veranderlijke X heeft de volgende dichtheidsfunctie

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{26}(x+2)^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bereken de verwachtingswaarde $E[X]$ van X.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{3}{26}\int_{-1}^{1} x(x+2)^2 dx \\
&= \frac{3}{26}\int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} (u-2)(u)^2 dx \quad [u = x+2; du = dx] \\
&= \frac{3}{26}\int_{1}^{3} u^3 dx - \frac{3}{26}2\int_{1}^{3} u^2 dx \\
&= \frac{3}{26}\left[\frac{u^4}{4}\right]_1^3 - \frac{6}{26}\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^3 \\
&= \frac{3}{26}\left[\frac{3^4}{4} - \frac{1}{4}\right] - \frac{6}{26}\left[\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}\right] \\
&= \frac{3}{26}\left[\frac{81-1}{4}\right] - \frac{6}{26}\left[\frac{27-1}{3}\right] \\
&= \frac{60}{26} - 2 = \frac{4}{13} \sim 0.3077
\end{aligned}$$

(b) Bepaal de momentgenererende functie (MGF) van X.

Oplossing: We berekenen de MGF via de definitie m.b.h.v. partiële integratie:

$$\begin{aligned}
M_X(t) = E(e^{tX}) &= \frac{3}{26}\int_{-1}^{1} (x+2)^2 e^{tx}\, dx \\
&= \frac{3}{26t}\left[(x+2)^2 e^{tx}\right]_{-1}^{1} - \frac{3}{26t}\int_{-1}^{1} 2(x+2)e^{tx}\, dx \\
&= \frac{3}{26t}\left(9e^t - e^{-t}\right) - \frac{6}{26t^2}\left[(x+2)e^{tx}\right]_{-1}^{1} + \frac{6}{26t^2}\int_{-1}^{1} e^{tx}\, dx \\
&= \frac{3}{26t}\left(9e^t - e^{-t}\right) - \frac{6}{26t^2}\left(3e^t - e^{-t}\right) + \frac{6}{26t^3}\left(e^t - e^{-t}\right)
\end{aligned}$$