PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 17 november 2011

Familienaam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Schrijf netjes en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het net af.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft, geef dus voldoende uitleg.

Veel succes!

---

1. Zij V een vectorruimte en S een (eventueel oneindige) deelverzameling van V. Bewijs:

   (a) als S maximaal vrij is in V, dan is S een basis van V,

   (b) als S minimaal voortbrengend is in V, dan is S een basis van V.

2. Bespreek het volgende stelsel met twee reële parameters a en b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 4y & + & az & = & 0 \\ x & + & ay & + & 3z & = & b \\ (a+1)x & + & (a+4)y & + & (a-b^2)z & = & b-2 \end{array}\right.$$

   Geef voor elke waarde van a en b in $\mathbb{R}$ de oplossingsverzameling van dit stelsel.

3. Noteer $\mathbb{Z}^{n\times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (A)_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ voor } i = 1,\ldots,n \text{ en } j = 1,\ldots,n\}$.

   (a) Toon aan dat voor elke $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ geldt dat $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

   (b) Zij $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Toon aan dat

$$\det(A) = \pm 1$$
$$\Updownarrow$$
$$A \text{ is inverteerbaar en } A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}.$$

4. Waar of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Voor alle lineaire deelruimten V_1, V_2 en W van $\mathbb{R}^n$ geldt er dat

$$(V_1 + V_2) \cap W = (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W).$$

   (b) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en zij A inverteerbaar. Veronderstel dat $A^2B = BA^2$ en dat $A^3B = BA^3$. Dan geldt ook $AB = BA$.