PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 17 november 2011

Familienaam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Schrijf netjes en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het net af.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft, geef dus voldoende uitleg.

Veel succes!

---

1. Zij V een vectorruimte en S een (eventueel oneindige) deelverzameling van V. Bewijs:
   (a) als S maximaal vrij is in V, dan is S een basis van V,
   (b) als S minimaal voortbrengend is in V, dan is S een basis van V.
2. Bespreek het volgende stelsel met twee reële parameters a en b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 4y & + & az & = & 0 \\ x & + & ay & + & 3z & = & b \\ (a+1)x & + & (a+4)y & + & (a-b^2)z & = & b-2 \end{array}\right.$$

   Geef voor elke waarde van a en b in $\mathbb{R}$ de oplossingsverzameling V van dit stelsel.

Oplossing We schrijven het stelsel in matrixvorm:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & a & 0 \\ 1 & a & 3 & b \\ a+1 & a+4 & a-b^2 & b-2 \end{array}\right)$$

Met behulp van elementaire rijoperatie herleiden we nu dit stelsel tot een eenvoudigere vorm:

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & b \\ a & 4 & a & 0 \\ a+1 & a+4 & a-b^2 & b-2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_2 \leftarrow R_2 - aR_1 \\ \longrightarrow \\ R_3 \leftarrow R_3 - (a+1)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 4-a^2 & -2a & -ab \\ 0 & a+4-a(a+1) & a-b^2-3(a+1) & b-2-b(a+1) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 4-a^2 & -2a & -ab \\ 0 & 4-a^2 & -2a-b^2-3 & -2-ba \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 4-a^2 & -2a & -ab \\ 0 & 0 & -b^2-3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & b \\ 0 & 4-a^2 & -2a & -ab \\ 0 & 0 & b^2+3 & 2 \end{array}\right)$$

Om het stelsel te kunnen bespreken, willen we zoveel mogelijk 1 verkrijgen op de hoofddiagonaal. We bekijken dus eerst of $4-a^2 = (2-a)(2+a)$ al dan niet 0 is.

- Stel eerst dat $a = 2$.
  In dit geval bekomen we de volgende matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -4 & -2b \\ 0 & 0 & b^2+3 & 2 \end{array}\right)$$

We voeren nu nog een rijoperatie op uit zodat de matrix in echelonvorm staat.

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 + \frac{(b^2+3)}{4} R_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & -4 & -2b \\ 0 & 0 & 0 & 2 - 2b\frac{(b^2+3)}{4} \end{array}\right)$$

Als $2 - 2b\frac{(b^2+3)}{4} = 0$ heeft dit stelsel oneindig veel oplossingen. In het andere geval bestaat er geen oplossing. Merk nu op dat

$$2b\frac{(b^2+3)}{4} - 2 = \frac{1}{2}(b^3 + 3b - 4) = \frac{1}{2}(b-1)(b^2+b+4).$$

Omdat de discriminant $D = -15$ van $b^2 + b + 4$ kleiner is dan nul, vinden we dat $(b-1)(b^2+b+4)$ alleen maar 0 kan zijn als $b = 1$.

- Stel dat $b = 1$.
  Het stelsel is in dit geval dan

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  en heeft dus de volgende oplossingsverzameling:

  Als $a = 2$ en $b = 1$, dan

  $$V = \{(-\frac{1}{2} - 2\lambda, \lambda, \frac{1}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- Stel dat $b \neq 1$.
  In dit geval heeft het stelsel geen oplossingen.

  Als $a = 2$ en $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dan

  $$V = \emptyset$$

- Stel nu dat $a = -2$.
  In dit geval bekomen we de analoge matrix

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 4 & 2b \\ 0 & 0 & b^2+3 & 2 \end{array}\right).$$

  Wederom kunnen we een rijoperatie uitvoeren:

  $$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 - \frac{(b^2+3)}{4} R_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b \\ 0 & 0 & 4 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 2 - 2b\frac{(b^2+3)}{4} \end{array}\right)$$

We moeten dus nagaan wanneer $2 - 2b\frac{(b^2+3)}{4}$ gelijk aan 0 is. Dit is dezelfde vergelijking als bij $a = 2$ en dus is dit alleen nul als $b = 1$.

– Stel dus weer dat $b = 1$.
  Het stelsel in dit geval geeft dan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  en dus de volgende oplossingsverzameling:

  Als $a = -2$ en $b = 1$, dan

$$V = \{(-\frac{1}{2} + 2\lambda, \lambda, \frac{1}{2}) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

– Stel dat $b \neq 1$.
  In dit geval heeft het stelsel geen oplossingen.

  Als $a = -2$ en $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, dan

$$V = \emptyset$$

- Veronderstel nu dat $a \neq 2$ en $a \neq -2$.
  We kunnen in dit geval delen door $a^2 - 4$. Merk ook op dat $b^2 + 3 > 0$ voor alle $b \in \mathbb{R}$ en dus zal $b^2 + 3$ nooit nul zijn. We vinden dus een unieke oplossing in dit geval.
  Met behulp van achterwaartse substitutie vinden we dan

$$z = \frac{2}{b^2+3},$$

$$y = \frac{1}{4-a^2}\left(\frac{4a}{b^2+3} - ab\right)$$

en

$$x = b - \frac{a}{4-a^2}\left(\frac{4a}{b^2+3} - ab\right) - \frac{6}{b^2+3}.$$

Als $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ en $b \in \mathbb{R}$, dan

$$V = \{(b - \frac{a}{4-a^2}\left(\frac{4a}{b^2+3} - ab\right) - \frac{6}{b^2+3}, \frac{1}{4-a^2}\left(\frac{4a}{b^2+3} - ab\right), \frac{2}{b^2+3})\}$$

3. Noteer $\mathbb{Z}^{n\times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid (A)_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ voor } i = 1, \ldots, n \text{ en } j = 1, \ldots, n\}$.

   (a) Toon aan dat voor elke $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ geldt dat $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

   Oplossing De determinant van A kan uitgedrukt worden als

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

   De determinant van A is dus de som van producten van gehele getallen en is dus een geheel getal.

   Alternatieve oplossing We bewijzen het gevraagde per inductie. Voor $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ is het te bewijzen triviaal. Veronderstel dat de uitspraak waar is voor alle $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $n \geq 2$. Zij A nu een $(n \times n)$-matrix. Dan kunnen we A ontwikkelen naar de i-de rij:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(M_{ij}),$$

   waarbij M_{ij} de minoren zijn van A. Deze zijn $(n-1) \times (n-1)$ matrices en hebben dus een gehele determinant wegens de inductiehypothese. We vinden dus opnieuw dat $\det(A)$ de som is van producten van gehele getallen, en dus een geheel getal is.

   (b) Zij $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Toon aan dat

$$\det(A) = \pm 1$$
$$\Updownarrow$$
$$A \text{ is inverteerbaar en } A^{-1} \in \mathbb{Z}^{n\times n}.$$

Oplossing We bewijzen twee implicaties.

$\boxed{\Downarrow}$ Aangezien $\det(A) \neq 0$ is A inverteerbaar. We weten dan door Gevolg 2.22 dat de inverse van A wordt gegeven door

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Nu is $\operatorname{adj}(A) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ want elke component van $\operatorname{adj}(A)$ is een determinant van de matrix met enkel gehele componenten en dus een geheel getal wegens (a). Dus $A^{-1} = \pm \operatorname{adj}(A)$ is ook een element van $\mathbb{Z}^{n\times n}$.

$\boxed{\Uparrow}$ We maken de volgende berekening:

$$1 = \det(I_{n\times n}) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Verder weten we door (a) dat zowel $\det(A)$ als $\det(A^{-1})$ gehele getallen zijn. De enige manier dat het product van twee gehele getallen gelijk is aan 1, is wanner ze beiden gelijk zijn aan -1 of wanneer ze beiden gelijk zijn aan 1. We kunnen dus besluiten dat $\det(A) = \pm 1$.

4. Waar of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Voor alle lineaire deelruimten V_1, V_2 en W van $\mathbb{R}^n$ geldt er dat

$$(V_1 + V_2) \cap W = (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W).$$

Oplossing Niet waar. Ik geef een tegenvoorbeeld in $\mathbb{R}^2$. Zij $V_1 = \langle (1,0) \rangle$, $V_2 = \langle (0,1) \rangle$ en $W = \langle (1,1) \rangle$. Dan geldt dat $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$, $V_1 \cap W = \{(0,0)\}$ en $V_2 \cap W = \{(0,0)\}$. Bijgevolg is $(V_1 + V_2) \cap W = W$ en $(V_1 \cap W) + (V_2 \cap W) = \{(0,0)\}$, en deze zijn niet gelijk.

(b) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en zij A inverteerbaar. Veronderstel dat $A^2B = BA^2$ en dat $A^3B = BA^3$. Dan geldt ook $AB = BA$.

Oplossing Dit is waar. We geven een bewijs.
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en zij A inverteerbaar. Veronderstel dat $A^2B = BA^2$ en dat $A^3B = BA^3$. Dan geldt

$$\begin{aligned} A^3B &= BA^3 \\ &= BA^2A \\ &= A^2BA. \end{aligned}$$

Door beide leden van de gelijkheid $A^3B = A^2BA$ langs links te vermenigvuldigen met $(A^{-1})^2$ verkrijgen we $AB = BA$, en dit moesten we bewijzen.