OPLOSSINGEN PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 18 november 2010

1. *Zij V een vectorruimte en $A = \{v_1, \ldots, v_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V die voortbrengend is voor V, m.a.w. $V = \langle A \rangle$. Bewijs dat elke deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk is. (Hierbij mag je de resultaten over stelsels eerstegraadsvergelijkingen gebruiken.)* Zie cursus. (theorievraag)

2. *Beschouw de vectoren*

$$(a, a-1, a-1),\ (2, 1, a) \ \textit{en}\ (a, 2, 2a)$$

in $\mathbb{R}^3$ waarbij $a \in \mathbb{R}$. Voor welke waarden van de parameter a geldt er dat

$$(1, 1, a) \in \langle (a, a-1, a-1), (2, 1, a), (a, 2, 2a) \rangle?$$

Er geldt dat $(1, 1, a) \in \langle (a, a-1, a-1), (2, 1, a), (a, 2, 2a) \rangle$ indien er $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ kunnen gevonden worden zodat $(1, 1, a) = \lambda_1(a, a-1, a-1) + \lambda_2(2, 1, a) + \lambda_3(a, 2, 2a)$. Dit betekent dat we moeten onderzoeken voor welke waarden van $a \in \mathbb{R}$ het stelsel

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & a\lambda_3 & = & 1 \\ (a-1)\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ (a-1)\lambda_1 & + & a\lambda_2 & + & 2a\lambda_3 & = & a \end{array} \right. \tag{1}$$

een oplossing heeft. We bespreken nu verschillende methodes om dit stelsel te bespreken.

a) Een eerste methode bestaat erin Gausseliminatie toe te passen op het stelsel. We verkrijgen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 1 \\ a-1 & 1 & 2 & 1 \\ a-1 & a & 2a & a \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 1 \\ a-1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & a & 1 \\ -1 & -1 & 2-a & 0 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a-2 & 0 \\ a & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 2-a & -a^2+3a & 1 \\ 0 & a-1 & 2a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2+5a-2 & a \\ 0 & a-1 & 2a-2 & a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - (a-1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & -a^2+5a-2 & a \\ 0 & 0 & (a-1)^2(a-4) & -(a-1)^2 \end{array} \right).$$

Hieruit volgt dat het stelsel een unieke oplossing heeft indien $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$. De gevallen $a = 1$ en $a = 4$ dienen apart onderzocht te worden.

Voor $a = 1$ krijgen we

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

wat erop wijst dat het stelsel oneindig veel oplossingen heeft voor $a = 1$, terwijl het stelsel voor $a = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

wordt, wat een strijdig stelsel is.

We concluderen dat voor $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ de vector $(1, 1, a)$ behoort tot de vectorruimte $\langle (a, a-1, a-1), (2, 1, a), (a, 2, 2a) \rangle$.

b) Om het stelsel (1) iets makkelijker van vorm te maken, hadden we in het begin de eerste en tweede kolom kunnen wisselen. (Het bekomen stelsel oplossen correspondeert dan met het vinden van $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ waarvoor $(1, 1, a) = \lambda_1(2, 1, a) + \lambda_2(a, a-1, a-1) + \lambda_3(a, 2, 2a)$.) Hierdoor hebben we in de eerste kolom onmiddellijk een spilelement verschillend van nul. Om het originele stelsel in trapvorm te brengen gebruikten velen onder jullie namelijk de rijoperaties $R_2 \to aR_2 - (a-1)R_1$ en $R_3 \to aR_3 - (a-1)R_1$: hierdoor creëer je het speciale geval $a = 0$ bij, wat je dan apart moet behandelen maar wat maar weinigen ook effectief deden. (Merk op dat we dit in a) omzeild hebben.)

c) In plaats van Gausseliminatie op het stelsel (1) toe te passen, kunnen we ook het volgende gebruiken. Aangezien het om een vierkant stelsel gaat, weten we dat als de determinant van de coëfficiëntenmatrix verschillend is van nul, het stelsel een unieke oplossing heeft.

De determinant van coëfficiëntenmatrix van (1) is

$$\det \begin{pmatrix} a & 2 & a \\ a-1 & 1 & 2 \\ a-1 & a & 2a \end{pmatrix} = (a-4)(a-1)^2.$$

Dus, voor $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 4\}$ heeft het stelsel (1) een unieke oplossing; de gevallen $a = 4$ en $a = 1$ moeten we apart behandelen, zoals we dit deden in a). De eindconclusie is opnieuw dat voor $a \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$ de vector $(1, 1, a)$ tot de vectorruimte $\langle (a, a-1, a-1), (2, 1, a), (a, 2, 2a) \rangle$ behoort.

3. *Zij $V = \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definieer een optelling op V als*

$$\begin{array}{rccc} \boxplus : & \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0 & \to & \mathbb{R}_0 \\ & (x, y) & \mapsto & x \boxplus y := x \cdot y \end{array}$$

en een scalaire vermenigvuldiging als

$$\begin{array}{rccc} \odot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0 & \to & \mathbb{R}_0 \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \odot x := x^\lambda. \end{array}$$

Ga na of V met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging een vectorruimte vormt.

Het is geen vectorruimte omdat de scalaire vermenigvuldiging niet goed gedefinieerd is. Een macht met een negatief grondtal is immers meestal niet gedefinieerd. Zo heeft bijvoorbeeld $(-1)^{1/2}$ geen betekenis in $\mathbb{R}_0$. Je weet dat -1 twee wortels heeft in $\mathbb{C}$, maar deze zitten niet in $\mathbb{R}_0$ en bovendien mag geen enkele van deze twee genoteerd worden met $(-1)^{1/2}$. Het was de bedoeling om $V = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ te beschouwen, met hierop een

optelling

$$\begin{array}{rccc} \boxplus: & \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & (x,y) & \mapsto & x \boxplus y := x \cdot y \end{array}$$

en een scalaire vermenigvuldiging

$$\begin{array}{rccc} \odot: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ & \to & \mathbb{R}_0^+ \\ & (\lambda,x) & \mapsto & \lambda \odot x := x^{\lambda}. \end{array}$$

Met deze optelling en scalaire vermenigvuldiging is V wel een vectorruimte. Hiervoor verifiëren we dat aan alle axioma's in de definitie van vectorruimte voldaan is.

(a) De optelling is inwendig en overal bepaald. Inderdaad, voor alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ geldt $x \boxplus y = x \cdot y \in \mathbb{R}_0^+$.

(b) De optelling is associatief. Inderdaad, voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$(x \boxplus y) \boxplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \boxplus (y \boxplus z).$$

(c) Het positieve reële getal 1 is het neutraal element voor de optelling, want voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$1 \boxplus x = 1 \cdot x = x \qquad \text{en} \qquad x \boxplus 1 = x \cdot 1 = x.$$

(d) Het tegengesteld element van $x \in \mathbb{R}_0^+$ is x^{-1} (het invers van x voor de gewone vermenigvuldiging), want

$$x \boxplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = 1 \qquad \text{en} \qquad x^{-1} \boxplus x = x^{-1} \cdot x = 1.$$

(e) De optelling is commutatief, want voor alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$x \boxplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \boxplus x.$$

(f) De scalaire vermenigvuldiging is nu wel goed gedefinieerd.

(g) Distributiviteit-1. Voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en voor alle $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$\lambda \odot (x \boxplus y) = (x \cdot y)^{\lambda} = x^{\lambda} \cdot y^{\lambda} = (\lambda \odot x) \boxplus (\lambda \odot y).$$

(h) Distributiviteit-2. Voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \odot x = x^{\lambda_1 + \lambda_2} = x^{\lambda_1} \cdot x^{\lambda_2} = (\lambda_1 \odot x) \boxplus (\lambda_2 \odot x)$$

(i) Distributiviteit-3. Voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt

$$\lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot x) = (x^{\lambda_2})^{\lambda_1} = x^{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \odot x.$$

(j) Coëfficiënt 1. Voor alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ geldt $1 \odot x = x^1 = x$.

4. *Beschouw twee veeltermen $f, g \in \mathbb{R}[x]$ van graad twee, m.a.w. $\deg f = \deg g = 2$. Veronderstel dat de discriminant van zowel f als g strikt positief is. (Merk op dat elke reële veelterm van graad twee met strikt positieve discriminant kan geschreven worden als $c(x - u_1)(x - u_2)$ met $c, u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ en u_1 en u_2 verschillend.)*

a) *Bewijs:*

$$f \text{ en } g \text{ hebben een gemeenschappelijk nulpunt}$$
$$\Updownarrow$$
$$f, xf, g \text{ en } xg \text{ zijn lineair afhankelijk in } \mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}.$$

$\Downarrow$ Uit het gegeven weten we dat we f en g kunnen schrijven als

$$\begin{aligned} f &= c(x-a)(x-u) \\ g &= d(x-a)(x-v) \end{aligned}$$

met $c, d \in \mathbb{R}_0$ en $a, u, v \in \mathbb{R}$, waarbij a het gemeeschappelijk nulpunt is van f en g. Hieruit vinden we, door f en g met gepaste veeltermen te vermenigvuldigen, dat

$$d(x-v)f = c(x-u)g.$$

Als we dit uitwerken krijgen we

$$dxf - dvf - cxg + cug = 0,$$

waarbij het linkerlid een niet-trivale lineaire combinatie is van f, xf, g en xg aangezien bijvoorbeeld $c \neq 0$.

$\Uparrow$ Zij

$$\lambda_1 f + \lambda_2 xf + \lambda_3 g + \lambda_4 xg = 0$$

met $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ en $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0,0,0,0)$. We kunnen dit herschrijven als

$$(\lambda_1 + \lambda_2 x)f = -(\lambda_3 + \lambda_4 x)g. \tag{2}$$

Indien $\lambda_4 = 0$, dan moet $\lambda_2 = 0$ door naar de graad van linker- en rechterlid te kijken. Aangezien f en g in dit geval op een veelvoud na gelijk zijn (er geldt dat $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_3$), is het duidelijk dat f en g dezelfde nulpunten hebben. We mogen vanaf nu dus veronderstellen dat $\lambda_4 \neq 0$.

Zij x_1 en x_2 de twee verschillende nulpunten van f. Door deze twee punten in te vullen in vergelijking (2) krijgen we

$$-(\lambda_3 + \lambda_4 x_1)g(x_1) = 0 \qquad \text{en} \qquad -(\lambda_3 + \lambda_4 x_2)g(x_2) = 0.$$

Indien de veeltermen f en g geen gemeenschappelijke nulpunten zouden hebben, dan zou $g(x_1) \neq 0 \neq g(x_2)$ en dus

$$\lambda_3 + \lambda_4 x_1 = 0 \qquad \text{en} \qquad \lambda_3 + \lambda_4 x_2 = 0.$$

Dit impliceert dat $x_1 = -\lambda_3/\lambda_4 = x_2$. (We mogen hier delen door λ_4 omdat we hebben verondersteld dat $\lambda_4 \neq 0$.) Dit kan echter niet aangezien we verondersteld hadden dat $x_1 \neq x_2$. De veronderstelling dat f en g geen gemeenschappelijke nulpunten hebben leidt dus tot een contradictie, dus moeten f en g wel een gemeenschappelijk nulpunt hebben.

b) *Geef, met behulp van a), een nodige en voldoende voorwaarde opdat f en g een gemeenschappelijk nulpunt hebben. Hiermee bedoelen we een nodige en voldoende voorwaarde op de coëfficienten van $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$ en $g = b_2x^2 + b_1x + b_0$ die gebruik maakt van een determinant.*

We schrijven

$$\begin{aligned} f &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ g &= b_2x^2 + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

We weten uit **a)** dat f en g een gemeenschappelijk nulpunt hebben als en slechts als f, xf, g en xg lineair afhankelijk zijn in $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$. Dit laatste betekent dat het stelsel

$$\begin{cases} a_0\lambda_1 & & + & b_0\lambda_3 & & & = & 0 \\ a_1\lambda_1 & + & a_0\lambda_2 & + & b_1\lambda_3 & + & b_0\lambda_4 & = & 0 \\ a_2\lambda_1 & + & a_1\lambda_2 & + & b_2\lambda_3 & + & b_1\lambda_4 & = & 0 \\ & & a_2\lambda_2 & & & + & b_2\lambda_4 & = & 0 \end{cases}$$

een niet-triviale oplossing heeft. Algemeen geldt er dat een homogeen vierkant stelsel een unieke oplossing (namelijk de nuloplossing) heeft als en slechts als de determinant van de coëfficientenmatrix van het stelsel verschillend is van nul; is dus deze determinant wel gelijk aan nul, dan heeft het beschouwde stelsel oneindig veel oplossingen (en dus zeker een niet-triviale).

In ons geval kunnen we dus besluiten dat f, xf, g en xg lineair afhankelijk zijn in $\mathbb{R}[x]_{\leqslant 3}$ als en slechts als

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix} = 0,$$

wat ons de gevraagde voorwaarde oplevert.