PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 20 november 2008

Naam: ....

Voornaam: ....

Richting + Reeks: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Enkel het net afgeven.

Veel succes!

---

1. Zij V een vectorruimte en $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ een deelverzameling van V. Bewijs:
   (a) als S een maximaal vrij deel is van V, dan is S een basis van V,
   (b) als S een minimaal voortbrengend deel is van V, dan is S een basis van V.

2. Beschouw de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$:

$$\Pi := \left\{ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

en

$$E := \left\{ (d,e,f) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ d & e & f \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

   (a) Toon aan dat Π een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^3$.
   (b) Bepaal een basis en dimensie van Π.
   (c) E is ook een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$. (Dit hoef je niet te bewijzen.) Bepaal een basis en dimensie van $\Pi \cap E$.

3. Zijn de volgende uitspraken WAAR of VALS? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
   (a) Zij $V_1, V_2 \subset V$ lineaire deelruimten van een vectorruimte V en zij $U_1, U_2 \subset V$ lineaire deelruimten van respectievelijk V_1 en V_2. Dan is $U_1 + U_2$ een lineaire deelruimte van $V_1 + V_2$.

(b) De verzameling

$$V := \{U \subset \mathbb{R}^3 \mid U \text{ is een lineaire deelruimte van } \mathbb{R}^3, +, \cdot\}$$

met optelling

$$\begin{array}{rcrcl} \boxplus & : & V \times V & \to & V \\ & & (U, W) & \mapsto & U \boxplus W := U + W \end{array}$$

en scalaire vermenigvuldiging

$$\begin{array}{rcrcl} \boxdot & : & \mathbb{R} \times V & \to & V \\ & & (\lambda, U) & \mapsto & \lambda \boxdot U := \{\lambda u \mid u \in U\} \end{array}$$

vormt een vectorruimte $V, \boxplus, \boxdot$.

4. Beschouw de lineaire afbeelding

$$\begin{array}{rcccc} \Psi & : & \mathbb{R}^{2\times 2} & \to & \mathbb{R}^{2\times 2} \\ & & \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+2y & y+3z \\ z+4w & w+5x \end{pmatrix}. \end{array}$$

Bepaal de matrix van Ψ:

(a) ten opzichte van (twee keer) de basis

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

(b) ten opzichte van (twee keer) de basis

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$