PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 18 november 2014

---

1. *(6pt)*

   (a) Bewijs: als $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dan is
   $$A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\mathbb{I}_n.$$

   (b) Zij V een vectorruimte en β een (eventueel oneindige!) deelverzameling van V die minimaal voortbrengend is voor V. Bewijs dat β een basis is van V.

   Oplossing:

   (a) Zie boek.

2. *(4pt)* Bespreek het volgende stelsel met twee reële parameters a en b.

$$\begin{cases} -x + (2a-3)y + (2a+b+1)z &= 6b+3 \\ 2x + (a+1)y + az &= 3b+6 \\ x + y &= 3 \end{cases}$$

Geef voor elke waarde van a en b in $\mathbb{R}$ de oplossingsverzameling van dit stelsel.

Oplossing: We schrijven de coëfficiëntenmatrix op van dit stelsel en herleiden deze tot een matrix in echelonvorm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2a-3 & 2a+b+1 & 6b+3 \\ 2 & a+1 & a & 3b+6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & a+1 & a & 3b+6 \\ -1 & 2a-3 & 2a+b+1 & 6b+3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-1 & a & 3b \\ 0 & 2a-2 & 2a+b+1 & 6b+6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-1 & a & 3b \\ 0 & 0 & b+1 & 6 \end{array}\right)$$

Om deze matrix vervolgens in echelonvorm te brengen, moeten we verschillende gevallen onderscheiden. We onderscheiden allereerst tussen $a = 1$ en $a \neq 1$.

(a) *Geval* $a = 1$. Dan wordt de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3b \\ 0 & 0 & b+1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3-(b+1)R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3b \\ 0 & 0 & 0 & 6-3b(b+1) \end{array}\right)$$

In de laatste regel staat een veelterm in b die ontbonden kan worden: $6-3b(b+1) = -3(b^2+b-2) = -3(b-1)(b+2)$. Dit betekent dat we ook voor de waarde van b twee gevallen moeten onderscheiden:

i. *Geval* $b=1$ of $b=-2$. Dan bevat de laatste rij van het gereduceerde stelsel alleen maar nullen en geldt er dat $z=3b$. Bovendien is y een vrije variabele. Kies nu $\lambda \in \mathbb{R}$ en stel $y=\lambda$. Dan is $x = 3-y = 3-\lambda$. De oplossingsverzameling is dus $\{(3-\lambda, \lambda, 3b) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

ii. *Geval* $b \neq 1$ en $b \neq -2$. Dan is het stelsel strijdig en is de oplossingsverzameling de lege verzameling.

(b) *Geval* $a \neq 1$. Dan kunnen we de tweede regel delen door $a-1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & a-1 & a & 3b \\ 0 & 0 & b+1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{a-1} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a}{a-1} & \frac{3b}{a-1} \\ 0 & 0 & b+1 & 6 \end{array}\right)$$

We zien nu direct dat er ook nu weer twee mogelijke gevallen zijn, afhankelijk van de waarde van b.

i. *Geval* $b=-1$. Dan is het stelsel strijdig en is de oplossingsverzamelijk de lege verzameling.

ii. *Geval* $b \neq -1$. Dan kunnen we de derde rij delen door $b+1$ en vinden we een stelsel op echelonvorm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a}{a-1} & \frac{3b}{a-1} \\ 0 & 0 & b+1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{b+1} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{a}{a-1} & \frac{3b}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{6}{b+1} \end{array}\right)$$

Dit stelsel heeft geen vrije variabelen en heeft dus een unieke oplossing. Na achterwaartse substitutie vinden we de oplossingsverzameling

$$\left\{\left(3-\frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{6}{b+1}\right)\right\}.$$

We kunnen dit als volgt samenvatten:

- Als $a=1$ en $b=1$, dan is de oplossingsverzameling $\{(3-\lambda, \lambda, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Als $a=1$ en $b=-2$, dan is de oplossingsverzameling $\{(3-\lambda, \lambda, -6) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Als ($a=1$ en $b \neq 1$ en $b \neq -2$) of als ($a \neq 1$ en $b=-1$), dan is de oplossingsverzameling de lege verzameling.
- Als $a \neq 1$ en $b \neq -1$, dan is de oplossingsverzameling $\left\{\left(3-\frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{6}{b+1}\right)\right\}$.

Opmerkingen:

- Let goed op de notatie van verzamelingen, hier gebeurden heel veel fouten mee.
  - De verzameling $\{0,0,0\}$ is een deel van $\mathbb{R}$ en kan dus geen oplossingsverzameling voorstellen van het stelsel. De correcte schrijfwijze is dus $\{(0,0,0)\}$.
  - De voorwaarden op de parameters a en b moeten niet meer vermeld staan binnen de oplossingsverzameling. In ons stelsel in het geval $a \neq 1$ en $b \neq -1$ is dit **geen correcte schrijfwijze** voor de oplossingsverzameling:

    $$\left\{\left(3-\frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{3b(b+1)-6a}{(a-1)(b+1)}, \frac{6}{b+1}\right) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\right\}.$$

    Als je dit opschrijft is er geen unieke oplossing, maar zijn er juist oneindig veel oplossingen.

- Je kan het getal $\frac{1}{a}$ pas opschrijven als je eerst al gezegd hebt dat $a \neq 0$.
- Als in een regel van je gereduceerde stelsel staat dat $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3b^2 - 3b + 6$, dan is dit **niet** strijdig voor de waardes van b waarvoor $-3b^2 - 3b + 6 = 0$.
- Kijk goed na of je de opgave niet fout hebt overgeschreven.
- Schrijf je rijoperaties op. Als je een rekenfout maakt is dit heel erg belangrijk.
- Je hoeft een stelsel niet te herleiden tot rijgereduceerde vorm, je kan ook herleiden tot echonlonvorm en dan verdergaan met achterwaartse substitutie.

3. *(4pt)* Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Zij $V = \mathbb{R}$. Leg hierop de optelling $x \oplus y := x + y$ en scalaire vermenigvuldiging $\lambda \odot x := \lambda^2 x$, waarbij $x, y \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan is V een vectorruimte voor de bewerkingen $\oplus$ en $\odot$.

   (b) Zij A en B inverteerbare $(n \times n)$-matrices zodat $A^2B^2 = B^2A^2$. Dan is $AB = BA$.

Oplossing:

(a) FOUT. Bekijk het volgende axioma van een vectorruimte, wat we ook wel distributiviteit-2 noemen:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \oplus v = (\lambda_1 \odot v) \oplus (\lambda_2 \odot v)$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en $v \in V$. Merk op dat dit niet geldt voor $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$ en $v = 1$ want

$$(2 + 2) \odot 1 = 4 \odot 1 = 16$$

en

$$(2 \odot 1) \oplus (2 \odot 1) = 4 \oplus 4 = 4 + 4 = 8.$$

Dit axioma is dus niet voldaan, waaruit volgt dat V met deze bewerkingen geen vectorruimte kan zijn.

(b) FOUT. Bekijk de volgende matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Merk op dat $A^2 = \mathbb{I}_3 = B^2$. Hieruit volgt dat $A^2B^2 = B^2A^2$. We zien echter ook dat

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze A en B vormen dus een tegenvoorbeeld. Je kan ook een tegenvoorbeeld vinden met (2×2)- matrices.

Opmerkingen:

- Schrijf altijd 'WAAR' of 'FOUT'.
- Kies altijd concrete waarden en laat dus expliciet zien dat het geen gelijkheid is.

4. *(6pt)* Beschouw de vectorruimte $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ en zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Als U een deelruimte van V is, dan definiëren we $U_A := \{A \cdot M \mid M \in U\}$.

   (a) Toon aan: als U een deelruimte is van V, dan is U_A ook een deelruimte van V.

(b) Zij ook $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Toon aan dat $U_{A+B} \subset U_A + U_B$.

(c) Toon aan dat in het algemeen niet geldt dat $U_{A+B} = U_A + U_B$.

(d) Bewijs:

$$U_A = U \text{ voor alle deelruimten } U \text{ van } V$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{Er bestaat een } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ zodat } A = \lambda \mathbb{I}_n.$$

Oplossing:

(a) Stel dat U een deelruimte is van V. We zullen bewijzen dat U_A een deelruimte is van V.

i. Merk eerst op dat er een $M \in U$ bestaat, bijgevolg is $AM \in U_A$. De verzameling U_A is dus al zeker niet leeg.

ii. Neem $X_1, X_2 \in U_A$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig. Dan zijn er $M_1, M_2 \in U$ zodat $X_1 = M_1 A$ en $X_2 = M_2 A$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned}\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 &= \lambda_1 A M_1 + \lambda_2 A M_2 \\ &= A(\lambda_1 M_1) + A(\lambda_2 M_2) \\ &= A(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2).\end{aligned}$$

Hierbij maakten we gebruik van de geziene rekenregels voor matrices. Aangezien U een deelruimte is, zal $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in U$ en bijgevolg is ook $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \in U_A$.

We kunnen uit i. en ii. besluiten dat U_A een deelruimte is.

(b) Neem $X \in U_{A+B}$ willekeurig, dan bestaat er een $M \in U$ zodat $X = (A+B)M = AM + BM$. Aangezien $AM \in U_A$ en $BM \in U_B$, is dus $X \in U_A + U_B$. We besluiten dat $U_{A+B} \subset U_A + U_B$.

(c) Neem $n = 2$, $U = V$ en

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dan is $U_{A+B} = \{0 \cdot M \mid M \in U\} = \{0\}$, maar $\mathbb{I}_2 \in U_A \subset U_A + U_B$. Aangezien $\mathbb{I}_n \notin U_{A+B}$, kunnen we besluiten dat $U_A + U_B \not\subset U_{A+B}$.

(d) Om deze equivalentie aan te tonen, moeten we twee implicaties aantonen.

"$\Downarrow$" Veronderstel dat $U_A = U$ voor alle deelruimten van V. Neem nu $U = \text{vct}\{\mathbb{I}_n\} = \{\lambda \mathbb{I}_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, dan is

$$A = A\mathbb{I}_n \in U_A = U.$$

Bijgevolg bestaat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ zodat $A = \lambda \mathbb{I}_n$. Stel dat $\lambda = 0$, dan was $U_A = \{0\} \neq U$. We besluiten dat $A = \lambda \mathbb{I}_n$ met $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

"$\Uparrow$" Veronderstel dat $A = \lambda \mathbb{I}_n$ met $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Neem U een willekeurige deelruimte van V. Merk op dat

$$U_A = \{\lambda \mathbb{I}_n \cdot M \mid M \in U\} = \{\lambda M \mid M \in U\}.$$

We zullen bewijzen dat $U_A = U$. Neem eerst $X \in U_A$, dan bestaat er een $M \in U$ zodat $X = \lambda M$. Omdat U een deelruimte is, is $X \in U$.
Stel nu dat $X \in U$. Dan is $\frac{1}{\lambda} X \in U$, omdat U een deelruimte is. Bijgevolg is

$$X = \lambda \frac{1}{\lambda} X \in U_A.$$

Opmerkingen:

- Het is niet voldoende om te bewijzen dat $U_A \subset V$, het woord deelruimte is niet hetzelfde als deelverzameling!
- Vergeet niet aan te tonen dat $U_A \neq \emptyset$.
- Als je een tegenvoorbeeld geeft, zoals bij (c), is het belangrijk om alles concreet te maken. Zo moet je niet alleen A en B, maar ook de deelruimte U specificeren.