PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 17 november 2015

Om je goed voor te bereiden op het examen Lineaire Algebra raden we je aan om alle opmerkingen bij het proefexamen goed te bestuderen. Er staan veel nuttige tips in!

1. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

   Opmerkingen:

   - Een correct bewijs vind je in het handboek. De theorie wordt in het handboek op een bepaalde manier opgebouwd. Het bewijs van het Lemma van Steinitz maakt gebruik van eerder bewezen resultaten over het oplossen van stelsels. Daar mag je dus ook in je antwoord gebruik van maken. Je kan echter geen gebruik maken van resultaten die later in het handboek bewezen worden en waarvan het bewijs gebruik maakt van het Lemma van Steinitz. Dat zou immers tot een cirkelredenering leiden.
   - Veel studenten gaan ervan uit dat de willekeurige deelverzameling met meer dan m elementen de originele deelverzameling A omvat. Dat hoeft niet zo te zijn.
   - Een kleinere en ook wat subtielere fout die sommige studenten maken is de volgende. Gegeven een willekeurige deelverzameling $\{y_1, \ldots, y_n\}$ met $n > m$ elementen, wordt er in het bewijs een homogeen stelsel geconstrueerd. Dit stelsel heeft n onbekenden en m vergelijkingen. Bijgevolg heeft dit stelsel altijd een oplossing verschillend van de nuloplossing. Voor elke oplossing $(c_1, \ldots, c_n)$ van het stelsel geldt dat de lineaire combinatie $c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ gelijk is aan nul. Sommige studenten schrijven in hun bewijs dat een dergelijke lineaire combinatie gelijk is aan nul **als en slechts als** $(c_1, \ldots, c_n)$ een oplossing van het stelsel is. Die bewering is alleen maar juist als de originele verzameling $\{x_1, ..., x_n\}$ vrij is.

2. Neem $a \in \mathbb{R}$ en beschouw in $\mathbb{R}^3$ de deelruimten $U = \text{vct}\{(5, 5, -5), (a, -5, 5a + 30)\}$ en $W = \text{vct}\{(6a + 5, 5a, a^2)\}$. Voor welke waarden van a is $(a + 5, 10, 5a - 35) \in U + W$?

   Oplossing:

   De vectorruimte $U + W$ is opgespannen door $\{(5, 5, -5), (a, -5, 5a + 30), (6a + 5, 5a, a^2)\}$. Dus de vector $(a + 5, 10, 5a - 36)$ is een element van $U + W$ als en slechts als er α, β en γ in $\mathbb{R}$ bestaan zodat

   $$(a + 5, 10, 5a - 36) = \alpha \cdot (5, 5, -5) + \beta \cdot (a, -5, 5a + 30) + \gamma \cdot (6a + 5, 5a, a^2)$$

   Of nog als en slechts als het volgende stelsel een oplossing heeft.

   $$\begin{cases} 5\alpha + a\beta + (6a + 5)\gamma & = a + 5 \\ 5\alpha + -5\beta + 5a\gamma & = 10 \\ -5\alpha + (5a + 30)\beta + a^2\gamma & = 5a - 35 \end{cases}$$

Om te bepalen wanneer dit stelsel een oplossing heeft schrijven we dit als matrix en herleiden we tot trapvorm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & a & 6a+5 & a+5 \\ 5 & -5 & 5a & 10 \\ -5 & 5a+30 & a^2 & 5a-35 \end{array}\right) \xrightarrow[]{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 + R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & a & 6a+5 & a+5 \\ 0 & -a-5 & -a-5 & 5-a \\ 0 & 6a+30 & a^2+6a+5 & 6a-30 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 6R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & a & 6a+5 & a+5 \\ 0 & -a-5 & -a-5 & 5-a \\ 0 & 0 & a^2-25 & 0 \end{array}\right).$$

We onderscheiden nu drie gevallen.

(a) $a = -5$. Dan bekomen we het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -5 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In de tweede rij bekomen we $0 = 10$. Dit stelsel is dus vals en de vector $(a+5, 10, 5a-36)$ is geen element van $U + W$.

(b) $a = 5$. We bekomen het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 35 & 10 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dit stelsel heeft oneindig veel oplossingen met precies één vrijheidsgraad. De vector $(a+5, 10, 5a-36)$ is dus een element van $U + W$.

(c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{5, -5\}$. Dan bekomen we het stelsel

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & a & 6a+5 & a+5 \\ 0 & -a-5 & -a-5 & 5-a \\ 0 & 0 & a^2-25 & 0 \end{array}\right).$$

Alle leidende elementen ($5, -a-5$ en $a^2 - 25$) zijn verschillend van nul en er zijn evenveel vergelijkingen als onbekenden. Dit stelsel heeft dus een unieke oplossing. De vector $(a+5, 10, 5a-36)$ is dus een element van $U + W$.

We concluderen dat de vector $(a+5, 10, 5a-36)$ een element is van $U + W$ als en slechts als $a \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$.

Opmerkingen:

- De enige manier waarop een stelsel geen oplossingen kan hebben is wanneer de matrix (trapvorm, echolonvorm, ...) die overeenkomt met dit stelsel een rij heeft van de vorm

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & \star \end{array}$$

  met $\star \neq 0$. Het volstaat dus om twee gevallen $a = -5$ en $a \neq -5$ te beschouwen. We geven het geval $a = 5$ voor de volledigheid.
- Het is niet nodig om de vector $(a+5, 10, 5a-36)$ als lineaire combinatie van de vectoren $(5, 5, -5), (a, -5, 5a+30)$ en $(6a+5, 5a, a^2)$ te schrijven. Het is dus niet nodig om het stelsel op te lossen, maar enkel om te bepalen voor welke getallen a het stelsel minstens één oplossing heeft. Om dit te bepalen volstaat het om de matrix te herleiden tot trapvorm. Het is dus overbodig werk om de matrix tot echelonvorm te brengen en/of achterwaartse substitutie toe te passen.

- Rijen delen om leidende elementen 1 te bekomen is overbodig rekenwerk en zorgt enkel voor rekenfouten.

3. Waar of fout? Argumenteer je antwoord.

   (a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dan is $\det(AA^T) \geq 0$.

   Oplossing: Wegens de eigenschappen van determinanten geldt dat

$$\begin{aligned}\det(AA^T) &= \det(A)\det(A^T)\\ &= \det(A)\det(A)\\ &= \det(A)^2.\end{aligned}$$

   Omdat $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, is $det(A) \in \mathbb{R}$ en dus is $\det(AA^T) \geq 0$.

   Opmerkingen:

   - De determinant van een symmetrische matrix is niet altijd positief.
   - Het is niet voldoende dit voor 2×2-matrices uit te rekenen en te zeggen dat het voor $n \geq 2$ analoog is. Als je schrijft dat een bewijs analoog is, moet dit ook echt het geval zijn!

   (b) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, stel dat A inverteerbaar is en $C = A^{-1}$. Dan $AB = BA$ als en slechts als $CB = BC$.

   Oplossing: Neem aan dat $AB = BA$. Aangezien $AC = CA = \mathbb{I}_n$, krijgen we dat

$$BC = \mathbb{I}_n BC = CABC = CBAC = CB\mathbb{I}_n = CB.$$

   Dit bewijst één implicatie.

   Door de rol van A en C om te wisselen, kan de andere implicatie op volledig analoge wijze worden bewezen.

   Opmerkingen:

   - De volgende bewering werd vaak vermeld op het examen:

$$AB = BA \Leftrightarrow CAB = CBA.$$

     Merk op dat in het algemeen enkel de implicatie van links naar rechts geldt! Doordat hier C een inverteerbare matrix is, geldt ook de andere implicatie. Als je de dubbele pijl schrijft, moet je dus ten minste vermelden dat dit geldt doordat C inverteerbaar is.
   - Uiteraard mag je ook de omgekeerde pijl volledig uitschrijven.

   (c) De verzameling $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x^3)\}$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   Oplossing: Waar. Zij $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x^3)\} \subset \mathbb{R}$. We gaan de criteria van een deelruimte na.

   - $U \neq \emptyset$, want de nulfunctie $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$ is een element van U. Er geldt namelijk dat $f_0(x) = 0 = f_0(x^3)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
   - Als $f, g \in U$, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $f(x) = f(x^3)$ en $g(x) = g(x^3)$. Dus

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x^3) + g(x^3) = (f + g)(x^3)$$

     voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus $f + g \in U$.
   - Als $f \in U$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat $f(x) = f(x^3)$. Dus

$$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot f(x^3) = (\lambda f)(x^3)$$

     voor alle $x \in \mathbb{R}$. Dus $\lambda f \in U$.

Dus de deelverzameling U is een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Opmerkingen:

- Vergeet niet om te bewijzen dat U niet leeg is.
- U is een verzameling van **functies**. Twee vectoren uit U optellen betekent dus twee **functies** optellen.
- De verzameling U is niet gelijk aan de verzameling van alle constante functies. Een voorbeeld van een niet-constante functie in U is

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ als } x = 1; \\ 0 \text{ als } x \neq 1. \end{cases}$$

(d) Zij V een n-dimensionale reële vectorruimte met $n \geq 2$. Er bestaan 3 verschillende deelruimten W_0, W_1, W_2 van V zodat $W_0 \subset W_1$, $W_0 + W_2 = V$ en $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Oplossing: FOUT. Stel dat er wel drie verschillende deelruimten W_0, W_1, W_2 van V bestaan zodat

i. $W_0 \subset W_1$,
ii. $W_0 + W_2 = V$,
iii. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Vanwege (i) en (ii) hebben we

$$V = W_0 + W_2 \subset W_1 + W_2 \subset V,$$

dus $W_0 + W_2 = V = W_1 + W_2$.
Vanwege (i) en (iii) en het feit dat de nulvector in iedere deelruimte zit, hebben we

$$\{0\} \subset W_0 \cap W_2 \subset W_1 \cap W_2 = \{0\},$$

dus $W_0 \cap W_2 = \{0\} = W_1 \cap W_2$.
Als we de dimensiestelling toepassen op W_0 en W_2 (resp. W_1 en W_2), dan vinden we

$$\begin{aligned} &\dim(W_0) + \dim(W_2) = \dim(W_0 + W_2) + \dim(W_0 \cap W_2) = \\ &\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2). \end{aligned}$$

Dus $\dim(W_0) = \dim(W_1)$. Als we dit combineren met (i), dan vinden we dat $W_0 = W_1$, maar dit is een tegenspraak met het feit dat de drie deelruimten **verschillend** zijn.
In een willekeurige vectorruimte V van dimensie $n \geq 2$ bestaan dus geen drie verschillende deelruimten W_0, W_1, W_2 die aan de eigenschappen (i), (ii) en (iii) voldoen.

Opmerkingen:

- $W_0 + W_2 \neq W_0 \cup W_2$! Kijk bijvoorbeeld naar $W_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ en $W_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$. Dan is $W_0 + W_2 = \mathbb{R}^2$ en deze verzameling bevat dus heel veel elementen die niet in de unie $W_0 \cup W_2$ zitten. Dit betekent dus dat als we een of ander element in $W_0 + W_2$ hebben dat niet in W_0 zit, dat het dan niet noodzakelijkerwijs in W_2 hoeft te zitten. Het kan ook een som zijn van een element uit W_0 en een element uit W_2.
- Bij deze vraag is het voldoende om voor één vectorruimte van dimensie ten minste 2 te laten zien dat zulke deelruimten niet bestaan. Het is dus ook correct om bijvoorbeeld een bewijs in $\mathbb{R}^2$ te geven.

Slotopmerking. Het proefexamen geeft een goed beeld van waar we verwachten dat jullie nu, in november, staan. In januari verwachten we dat jullie inzicht nog verder verdiept is.