PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 28 november 2017

---

1. Bewijs de volgende twee uitspraken.

   (a) Zij $(\mathbb{R}, U, +)$ een vectorruimte en $\beta \subset U$ een maximaal vrij deel. Toon aan dat β een basis van U is.

   (b) Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en $U \subset V$ een deelruimte. Toon aan dat U eindig voortgebracht is en dat $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2. Waar of fout? Argumenteer je antwoord.

   (a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat voor alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt dat $AB = BA$. Dan is $A = \lambda \mathbb{I}_n$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Oplossing. De stelling is JUIST. Veronderstel dat een matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ voldoet aan de gestelde eigenschap. Stel voor $1 \leq i, j \leq n$ de matrix $E_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de matrix met enkel een 1 op de plaats (i, j) en 0 elders. Er zou dus moeten gelden dat $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Merk nu op dat voor $1 \leq k, l, \leq n$:

$$(AE_{i,j})_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{als } l \neq j \\ a_{k,i} & \text{als } l = j. \end{cases}$$

   Met andere woorden: de matrix is overal 0, behalve in kolom j, daar staat nu kolom i uit A. De matrix $E_{i,j}A$ is overal 0, behalve in rij i, daar staat nu rij j uit A, of nog:

$$(E_{i,j}A)_{k,l} = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq i \\ a_{j,l} & \text{als } k = i. \end{cases}$$

   Er volgt dat als $l \neq j$, dan $a_{j,l} = 0$ en wanneer $k \neq i$ dan moet $a_{k,i} = 0$. Wanneer $k = i$ en $l = j$ vinden we dat $a_{i,i} = a_{j,j}$. Vermits dit geldt voor alle $1 \leq i, j \leq n$ omdat $AB = BA$ voor alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, volgt dat A een diagonaalmatrix is en bovendien alle elementen op de diagonaal gelijk zijn, dus: $A = \lambda \mathbb{I}_n$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Opmerkingen. In deze oefeningen werden zeer vaak de volgende fouten gemaakt.

   - Er werd bewezen dat indien $A = \lambda \mathbb{I}_n$, dat dan voor alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ geldt dat $AB = BA$. Dit bewijst echter de andere implicatie!
   - Men nam een expliciete $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en een expliciete $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat $AB = BA$ en $A \neq \lambda \mathbb{I}_n$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{R}$. Bijvoorbeeld het koppel A en A^{-1}. In de veronderstelling staat dat A ***voor alle*** $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ moet voldoen aan $AB = BA$. Dergelijk voorbeeld geven heeft dus geen zin.
   - In een poging om te bewijzen dat de stelling al dan niet juist is, gebruikten sommigen de matrix A^{-1}. Je moet echter eerst aantonen dat die wel bestaat. Er is een willekeurige $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeven, die is niet noodzakelijk inverteerbaar!
   - Een goede poging was het beschrijven van de elementen $(AB)_{i,j}$ en $(BA)_{i,j}$ met $1 \leq i, j \leq n$ en deze te vergelijken. Dit levert:

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$
$$(BA)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} b_{i,l} a_{l,j}.$$

Bijgevolg zou dus moeten gelden dat

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{l=1}^{n} b_{i,l} a_{l,j}.$$

Vele mensen concludeerden hieruit onmiddellijk de stelling. Je moet echter nauwkeurig aantonen waarom hieruit volgt dat $a_{i,j} = 0$ als $i \neq j$ en alle diagonaal elementen gelijk zijn. Dit doe je door de 'goede matrix B' (of in deze som coëfficiënten) te kiezen, zoals hierboven.

(b) Zij U_1, U_2 en U_3 deelruimten van een vectorruimte V. Dan geldt:

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3).$$

Oplossing. De stelling is FOUT. Een tegenvoorbeeld kan al gegeven worden in $V = \mathbb{R}^2$. Stel $U_1 = \text{vct}\{(1,1)\}$, $U_2 = \text{vct}\{(1,0)\}$ en $U_3 = \text{vct}\{(0,1)\}$. Merk op dat: $U_1 \cap U_2 = 0 = U_1 \cap U_3$ en $U_2 + U_3 = V$. Bijgevolg vinden we:

$$\begin{aligned} U_1 \cap (U_2 + U_3) &= U_1 \cap V = U_1 \\ (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Opmerkingen.

- Zorg dat je je vectorruimten en deelruimten duidelijk opschrijft. Schrijf je bv. $U_1 = (0,1)$, zonder aan te duiden in welke vectorruimte je werkt, dan heeft dit geen enkele betekenis. Bovendien, als je zou vermelden dat $V = \mathbb{R}^2$, dan is deze U_1 een punt, geen deelruimte!
- Sommigen definieerden hun deelruimten als 'de x-as', de 'y-as', het 'xy-vlak',... Definieer deze duidelijk.
- Anderen probeerden de gelijkheid aan te tonen aan de hand van basissen voor de deelruimten. Let hier mee op! Als β_1 een basis is voor U_1 en β_2 voor U_2, dan is $\beta_1 \cap \beta_2$ niet noodzakelijk een basis voor $U_1 \cap U_2$.
- Als $v \in U_2 + U_3$ dan volgt hier ***niet*** uit dat $v \in U_2$ of $v \in U_3$. Neem bijvoorbeeld $U_1 = \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$ en $U_2 = \{(0,y) | y \in \mathbb{R}\}$, deelruimten van $\mathbb{R}^2$. Dan is $v = (1,1)$ een element van $U_1 + U_2$, maar v zit niet in U_1 of U_2.

(c) Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan is

$$U_A := \{0\} \cup \{B \in \mathbb{R}^m \mid \text{het stelsel } AX = B \text{ heeft een unieke oplossing}\}$$

een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

De bewering is juist.

Oplossingsmethode 1. Om na te gaan dat de deelverzameling U_A van de vectorruimte $\mathbb{R}^m$ een deelruimte is van $\mathbb{R}^m$, gaan we na dat U_A aan het deelruimtecriterium voldoet.

- $U_A \neq \emptyset$, want $0 \in U_A$.
- Stel dat $B_1, B_2 \in U_A$. Om te bewijzen dat $B_1 + B_2 \in U_A$, onderscheiden we twee gevallen.
  1. Als $B_1 = 0$ of $B_2 = 0$, dan is de som $B_1 + B_2$ gelijk aan B_1 of gelijk aan B_2, dus geldt zeker dat $B_1 + B_2 \in U_A$.

2. Als $B_1 \neq 0$ en $B_2 \neq 0$, dan heeft het stelsel $AX = B_1$ een unieke oplossing, die we Y_1 noemen, en heeft het stelsel $AX = B_2$ ook een unieke oplossing, die we Y_2 noemen. Er geldt dan

$$A(Y_1 + Y_2) = AY_1 + AY_2 = B_1 + B_2,$$

dus is $Y_1 + Y_2$ een oplossing van het stelsel $AX = B_1 + B_2$.
Nu moeten we nog aantonen dat $Y_1 + Y_2$ de **enige** oplossing is van dit stelsel. Stel namelijk dat Y ook een oplossing is van het stelsel $AX = B_1 + B_2$, dan geldt

$$A(Y - Y_2) = AY - AY_2 = (B_1 + B_2) - B_2 = B_1.$$

Dit betekent dat $Y - Y_2$ dan een oplossing moet zijn van het stelsel $AX = B_1$. Omdat dit een stelsel is met unieke oplossing Y_1, moet dus wel $Y - Y_2 = Y_1$, oftewel $Y = Y_1 + Y_2$.
Dus de enige oplossing van het stelsel $AX = B_1 + B_2$ is $Y_1 + Y_2$, dus dit stelsel heeft een unieke oplossing en dus $B_1 + B_2 \in U_A$.

- Stel dat $B \in U_A$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Om te bewijzen dat $\lambda B \in U_A$, onderscheiden we twee gevallen.
  1. Als $B = 0$ of $\lambda = 0$, dan is $\lambda B = 0 \in U_A$.
  2. Als $B \neq 0$ en $\lambda \neq 0$, dan heeft het stelsel $AX = B$ een unieke oplossing die we Y noemen. Er geldt dan

$$A(\lambda Y) = \lambda AY = \lambda B,$$

dus is λY een oplossing van het stelsel $AX = \lambda B$.
Nu moeten we nog aantonen dat λY de **enige** oplossing is van dit stelsel. Stel namelijk dat $\tilde{Y}$ ook een oplossing is van het stelsel $AX = \lambda B$, dan is, vanwege de aanname dat $\lambda \neq 0$, $\frac{1}{\lambda}\tilde{Y}$ een oplossing van het stelsel $AX = B$. Omdat dit een stelsel is met unieke oplossing Y, moet wel $\frac{1}{\lambda}\tilde{Y} = Y$, oftewel $\tilde{Y} = \lambda Y$.
Dus de enige oplossing van het stelsel $AX = \lambda B$ is λY, dus dit stelsel heeft een unieke oplossing en dus $\lambda B \in U_A$.

De verzameling U_A voldoet dus aan alle voorwaarden van het deelruimtecriterium en is dus een deelruimte van $\mathbb{R}^m$.

Oplossingsmethode 2. Zij $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rijgereduceerde matrix die door middel van elementaire rijoperaties uit A verkregen kan worden. We onderscheiden nu twee gevallen.

(1) Als de rijgereduceerde matrix $\tilde{A}$ vrije variabelen heeft, dan heeft geen enkel stelsel van de vorm $AX = B$ een unieke oplossing. Dus in dit geval is $U_A = \{0\}$ en we weten dat dit een deelruimte van $\mathbb{R}^m$ is.

(2) Als de rijgereduceerde matrix $\tilde{A}$ geen vrije variabelen heeft, dan heeft een stelsel van de vorm $AX = B$ ofwel geen oplossingen, ofwel een unieke oplossing, en dit hangt af van de waarde van B.
Zij $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ een kolomvector. We kunnen het stelsel $AX = B$ via elementaire rijoperaties omvormen naar een stelsel $\tilde{A}X = \tilde{B}$, met $\tilde{A}$ de rijgereduceerde matrix (die dus geen vrije variabelen heeft). De vector $\tilde{B}$ is verkregen uit

de vector B door elementaire rijoperaties, dus de i-de coördinaat van $\tilde{B}$ is van de vorm $\lambda_{i1}b_1 + \ldots + \lambda_{im}b_m$, voor zekere $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{im} \in \mathbb{R}$. Als de laatse k rijen van $\tilde{A}$ nulrijen zijn, dan heeft het stelsel $\tilde{A}X = \tilde{B}$ een unieke oplossing als en slechts als de laatste k coördinaten van $\tilde{B}$ gelijk zijn aan 0. Dus

$$\begin{aligned} U_A &= \{B \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_{i1}b_1 + \ldots + \lambda_{im}b_m = 0 \ \forall i \in \{m-k+1, \ldots, m\}\} \\ &= N \begin{pmatrix} \lambda_{(m-k+1)1} & \cdots & \lambda_{(m-k+1)m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en we weten dat de nulruimte van een matrix een deelruimte is.

Opmerkingen.

- Let op notatie. We mogen niet schrijven $\{0\} \in U_A$, maar wel $0 \in U_A$ of $\{0\} \subset U_A$.
- Als je voor het stelsel $AX = B_1 + B_2$ een oplossing $Y_1 + Y_2$ hebt gevonden, dan moet je niet vergeten om aan te tonen dat die oplossing **uniek** is. Hiervoor moet je een willekeurige oplossing Y nemen en dan laten zijn dat zo'n oplossing alleen maar gelijk kan zijn aan de oplossing $Y_1 + Y_2$.
- Als het stelsel $AX = B$ een unieke oplossing heeft, dan volgt daar niet uit dat A inverteerbaar is, dat A vierkant is of dat A geen nulrijen heeft. Het stelsel
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
heeft bijvoorbeeld een unieke oplossing $x_1 = 2$ en $x_2 = 3$, maar de matrix A is niet inverteerbaar en zelfs niet vierkant en heeft bovendien wel een nulrij.

3. Zij $V = \mathbb{R}^3$ en $a, b \in \mathbb{R}$. Stel $v_1 = (a^2, a, 1)$, $v_2 = (0, 0, b)$ en $v_3 = (a, -a, 1)$. Bepaal de dimensie van $\text{vct}\{v_1, v_2, v_3\}$ in functie van de parameters a en b.

Oplossing. Aangezien $\text{vct}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$ weten we dat $\dim \text{vct}(v_1, v_2, v_3) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$ met gelijkheid als en slechts als $\text{vct}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$ als en slechts als $\{v_1, v_2, v_3\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$ als en slechts als

$$\det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} = -ba^2(a+1) \neq 0.$$

Dit is het geval als en slechts als $a \neq 0$ en $a \neq -1$ en $b \neq 0$. Deze exceptionele gevallen moet we nu verder onderzoeken.

(a) $\mathbf{a = 0}$ In dit geval is $\text{vct}(v_1, v_2, v_3) = \text{vct}((0, 0, 1))$, dus is de dimensie 1.

(b) $\mathbf{a = -1}$ Aangezien we hierna het geval $b = 0$ behandelen kunnen we hier aannemen dat $b \neq 0$. Merk op dat dan de vectoren $(a^2, a, 1) = (1, -1, 1)$ en $(0, 0, b)$ duidelijk lineair onafhankelijk zijn, en dus dat $\dim \text{vct}(v_1, v_2, v_3) \geq 2$. Aangezien we al hebben geconcludeerd dat $\dim \text{vct}(v_1, v_2, v_3) < 3$ weten we dat $\dim \text{vct}(v_1, v_2, v_3) = 2$.

(c) $\mathbf{b = 0}$ In dit geval vinden we $v_2 = 0$, dus $\text{vct}(v_1, v_2, v_3) = \text{vct}(v_1, v_3)$. De dimensie is dus $0, 1$ of 2. Aangezien v_1 en v_3 niet nul zijn, is de dimensie groter dan 0. Het geval $a = 0$ is al besproken, dus we kunnen aannemen dat $a \neq 0$. De dimensie is 1 als en slechts als er $\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ bestaan, niet beiden 0, zo dat $\lambda_1 v_1 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1 a^2 + \lambda_3 a, (\lambda_1 - \lambda_3)a, \lambda_1 + \lambda_3) = 0$. We concluderen dat $\lambda_1 = \lambda_3$ en tegelijk $\lambda_1 = -\lambda_3$, dus $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Dus de dimensie is niet gelijk aan 0 of 1, dus moet de dimensie 2 zijn.