

Tussentijdse Toets Wiskunde I

Voornaam: _____

Achternaam: _____

Studentennummer: _____

Studierichting: _____

Reeksnummer: _____

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst.
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, symbolisch niet). Het rekenmachine mag gebruikt worden om rekenwerk te vereenvoudigen, maar tussenstappen moeten steeds opgeschreven worden.
- Deelname aan dit proefexamen is niet verplicht. Je kan hier geen punten of bonuspunten mee verdienen.
- Succes!

Vraag:	1	2	3	4	Totaal
Punten:	4	6	4	5	19
Score:					

Vraag	MK 1	MK 2
Antwoord		

1. Noteer in bovenstaande kader het antwoord bij elke meerkeuzevraag. Er is telkens maar één juist antwoord. Je kan een meerkeuzevraag ook blanco laten door niets in het vakje te schrijven. Enkel de antwoorden in de kader worden verbeterd. Je hoeft geen verklaring te geven.

Je krijgt per meerkeuzevraag +2 voor een correct antwoord en 0 indien je de vraag blanco laat of fout beantwoordt.

(2 pt) **(MK 1)** Zij $a > 0$ een reëel getal en $f(x)$ een oneven functie gedefinieerd op $-a < x < a$. Neem aan dat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Welke stelling is correct?

- A. $\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x) = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} f^3(x) = +\infty$
- B. $\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x) = +\infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} f^3(x) = -\infty$
- C. $\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x) = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} f^3(x) = +\infty$
- D. $\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x) = -\infty$ en $\lim_{x \rightarrow a} f^3(x) = -\infty$
- E. $\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x)$ en $\lim_{x \rightarrow a} f^3(x)$ bestaan niet

Oplossing

Merk op dat $f^3(x)$ een samenstelling is van twee functies, namelijk

$$f^3(x) = (g \circ f)(x) \quad \text{met} \quad g(x) = x^3.$$

Omdat g een continue functie is geldt er dat

$$\lim_{x \rightarrow a} f^3(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^3 = (\infty)^3 = \infty.$$

Om de limiet $x \rightarrow -a$ te berekenen passen we een substitutie toe. We stellen $x = -t$ zodat als $x \rightarrow -a$, dan gaat $t \rightarrow a$. Zo vinden we

$$\lim_{x \rightarrow -a} f^3(x) = \lim_{t \rightarrow a} f^3(-t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} f(-t) \right)^3 \stackrel{(\star)}{=} \left(\lim_{t \rightarrow a} -f(t) \right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty.$$

Bij $(\star)$ maken we gebruik van het gegeven dat f een oneven functie is.

Antwoord versie A: A

Antwoord versie B: C

(2 pt) **(MK 2)** Beschouw de functie $f(x) = x^3 e^{\lambda x}$ met $\lambda > 0$. Wat geldt voor de stationaire punten en lokale minima van f ?

- A. De enige stationaire punten zijn $-\frac{3}{\lambda}$ en 0. Ze zijn allebei lokale minima.
- B. De enige stationaire punten zijn $-\frac{3}{\lambda}$ en 0. Ze zijn beiden geen lokaal minimum.
- C. De enige stationaire punten zijn $-\frac{3}{\lambda}$ en 0. Het enige lokaal minimum is $x = -\frac{3}{\lambda}$.
- D. De enige stationaire punten zijn $-\frac{3}{\lambda}, 0$ en $\frac{3}{\lambda}$. De enige lokale minima zijn $x = -\frac{3}{\lambda}$ en $x = \frac{3}{\lambda}$.
- E. De enige stationaire punten zijn $-\frac{3}{\lambda}, 0$ en $\frac{3}{\lambda}$. Het enige lokaal minimum is $x = 0$.

Oplossing

De stationaire punten vind je door de vergelijking $f'(x) = 0$ op te lossen. We leiden eerst de functie f af door gebruik te maken van de productregel.

$$f'(x) = 3x^2 e^{\lambda x} + x^3 \cdot \lambda e^{\lambda x} = (3x^2 + \lambda x^3) e^{\lambda x}$$

Nu zoeken we de nulpunten van deze afgeleide:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (3x^2 + \lambda x^3) e^{\lambda x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + \lambda x^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(3 + \lambda x) = 0 \end{aligned}$$

Uit deze laatste vergelijking volgt dat $x_1 = 0$ en $x_2 = -\frac{3}{\lambda}$ de oplossingen zijn. Merk op dat $x = 0$ een dubbel nulpunt is.

Nu moeten we deze stationaire punten nog classificeren. Dit kan aan de hand van een tekentabel of aan de hand van de tweede afgeleidetest. Wij gebruiken de eerste methode.

Omdat $\lambda > 0$ weten we dat $x_2 < x_1$. Om het teken voor x -waarden kleiner dan x_2 te bepalen, vullen we $x = -\frac{4}{\lambda}$ in in de eerste afgeleide. We vinden dan

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{4}{\lambda}\right) &= \left(3\left(-\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \lambda\left(-\frac{4}{\lambda}\right)^3\right) e^{\lambda\left(-\frac{4}{\lambda}\right)} \\ &= \frac{16}{\lambda^2} \left(3 + \lambda \cdot \left(-\frac{4}{\lambda}\right)\right) e^{-4} \\ &= \frac{16}{\lambda^2} \cdot (-1) \cdot e^{-4} < 0 \end{aligned}$$

Omdat x_2 een enkelvoudig nulpunt is, krijgen we hier een tekenwissel en omdat x_1 een dubbel nulpunt is, verandert het teken van de eerste afgeleide niet. Hierdoor vinden we volgende tekentabel:

x		$-\frac{3}{\lambda}$		0	
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	bgpt	$\nearrow$

Uit deze tabel kunnen we concluderen dat x_1 en x_2 stationaire punten zijn waarbij x_2 een lokaal minimum en x_1 geen lokaal minimum is.

Antwoord versie A: E

Antwoord versie B: C

Naam: _____

(4 pt) 2. (a) Vind alle complexe getallen $z = x + iy$ die oplossing zijn van

$$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(2 pt) (b) Vind alle complexe getallen $z = x + iy$ die voldoen aan

$$z^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}iz + \frac{\sqrt{3}}{8}i = 0.$$

Oplossing

(a) **Manier 1:**

We lossen dit op door over te gaan op de goniometrische schrijfwijze.

1. We berekenen de modulus en het argument van het rechterlid.

– De modulus r_1 berekenen we als volgt:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

– Het argument θ_1 berekenen we zoals de uitdrukking op p.57. Omdat $x < 0$ vinden we formule:

$$\theta_1 = \pi + \text{bgtan} \frac{y}{x} = \pi + \text{bgtan} \sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

met $k \in \mathbb{Z}$.

Zo vinden we dat

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

2. Vervolgens stellen we $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ en berekenen we z^2 . Voor de berekening van z^2 gebruiken we de formule van De Moivre op p.71.

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

3. Nu lossen we de vergelijking op door linker- en rechterlid te vervangen door hun goniometrische vorm. Zo vinden we

$$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

Twee complexe getallen zijn gelijk aan elkaar als en slechts hun moduli gelijk zijn en hun argumenten gelijk zijn. Zo vinden we dat

$$\begin{cases} r^2 &= 1 \\ 2\theta &= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r &= 1 \\ \theta &= \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

met $k \in \mathbb{Z}$.

4. Zo vinden we twee verschillende oplossingen:

$$k = 0 : \quad z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1 : \quad z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Opmerking: de oplossing in goniometrische vorm is zeker ook voldoende.

Manier 2:

Stel $z = x + iy$, dan is $z^2 = x^2 + 2xyi - y^2$. We weten dat twee complexe getallen gelijk zijn aan elkaar als en slechts als hun reële delen gelijk zijn en hun imaginaire delen gelijk zijn. Zo vinden we

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= -\frac{1}{2} \\ 2xy &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{3}{16x^2} &= -\frac{1}{2} \\ y &= -\frac{\sqrt{3}}{4x} \end{cases}$$

In de eerste vergelijking hebben we enkel nog de variabele x dus deze vergelijking lossen we op:

$$x^2 - \frac{3}{16x^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 16x^4 + 8x^2 - 3 = 0.$$

Door over te gaan naar een tweedegraadvergelijking vinden we uiteindelijk als oplossing $x = \pm \frac{1}{2}$. Voor $x = \frac{1}{2}$ vinden we $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en voor $x = -\frac{1}{2}$ vinden we $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. De oplossingen worden dan gegeven door

$$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

(b) Een tweedegraadsvergelijking lossen we op met behulp van de discriminant. Zo vinden we

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{8}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Om nu de nulpunten te berekenen gebruiken we volgende formule

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Om $\pm\sqrt{D}$ te berekenen, lossen we eigenlijk de vergelijking $D = t^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ op naar t waarbij $t = \pm\sqrt{D}$. Deze oplossing vonden we reeds in (a). Merk op dat het niet uitmaakt welke oplossing je neemt want ze zijn elkaars tegengestelde en in de formule staat $\pm\sqrt{D}$. We gebruiken in deze uitwerking $t = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zo vinden we

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}i \pm \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}i \pm \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right). \end{aligned}$$

Naam: _____

(4 pt) 3. Zij $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Bereken de limiet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(\sinh x)}{\ln(\lambda(x+1))}.$$

4. Beschouw de functie $f(x) = \sin(x)$.

(2 pt) (a) Schets het gebied in het xy -vlak dat begrensd wordt door de grafiek van f , de grafiek van $-f$, de rechte $x = -\frac{1}{2}\pi$ en de rechte $x = \frac{5}{2}\pi$.

(2 pt) (b) Bereken de oppervlakte van dit gebied. Toon je berekeningen.

(1 pt) (c) Zij $n \in \mathbb{N}_0$. Noteer met G_n de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van f , de grafiek van $-f$, de rechte $x = -\frac{1}{2}\pi$ en de rechte $x = (n - \frac{1}{2})\pi$.

Wat kan je zeggen over het quotiënt $\frac{G_n}{n}$? Beargumenteer.

Oplossing

3. Herinner dat

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow \sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0.$$

We weten ook dat de noemer voor $x = 0$ gelijk is aan

$$\ln(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{als } \lambda = 1 \\ a \neq 0 & \text{als } \lambda \neq 1. \end{cases}$$

We maken vervolgens gevalsonderscheid voor het berekenen van de limiet.

- Stel $\lambda = 1$. Dit kunnen we invullen in de limiet die we willen berekenen.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(\sinh x)}{\ln(\lambda(x+1))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\ln(x+1)}$$

Deze limiet kunnen we op twee manieren berekenen.

– **Manier 1:**

We maken gebruik van de regel van l'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(\sinh x)}{\ln(\lambda(x+1))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\ln(x+1)} \left(= \frac{0}{0} \right) \\ &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x}{\frac{1}{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \cosh x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \\ &= 1 \cdot \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

– **Manier 2:**

We berekenen de Taylorveeltermen van graad 5 rond $x = 0$ van de teller en de noemer. Zo vinden we respectievelijk

$$P_{\text{teller}}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$P_{\text{noemer}}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

Zo kunnen we de limiet herschrijven en verder uitrekenen.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{\ln(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots \right)}{x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \dots}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots} = 1 \end{aligned}$$

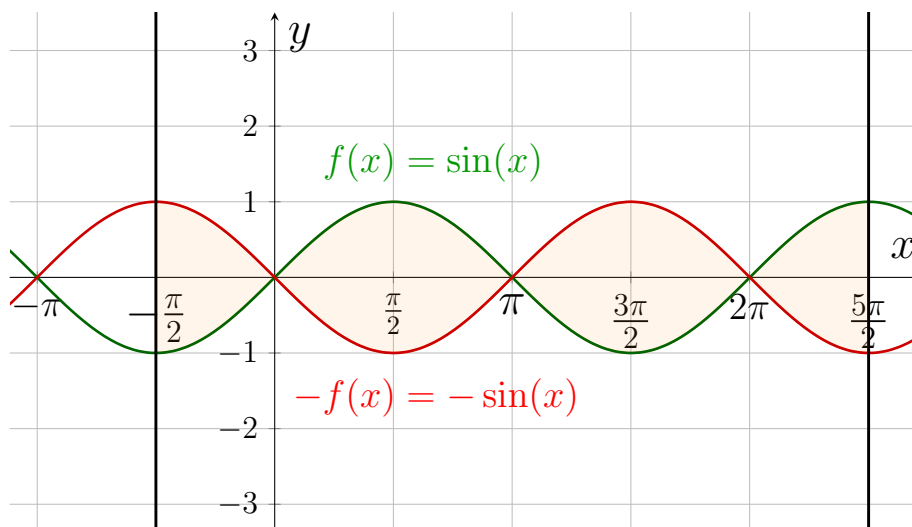
Opmerking 1: Merk op dat het voldoende was om voor de teller en noemer een Taylorveelterm van graad 1 op te stellen. Om fouten te vermijden kan het wel nuttig zijn om soms een Taylorveelterm van een iets hogere graad te berekenen.

Opmerking 2: Als je een limiet berekent door gebruik te maken van Taylorveeltermen, dan willen we dat deeltje graag exact vervangen. Daarom is het belangrijk dat je “+...” noteert wanneer een deeltje vervangt door zijn Taylorveelterm. Zie ook p.137 in de cursus.

- Stel $\lambda \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, dan is

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda(\sinh x)}{\ln(\lambda(x+1))} &= \frac{0}{a} \quad \text{met } a \neq 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. (a) We schetsen het gevraagde gebied.



Let op dat je:

- de assen benoemt
- de assen ijkt
- de grafieken benoemt

(b) We schetsen het gevraagde gebied. De oppervlakte wordt gegeven door

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |f(x) - (-f(x))| dx.$$

Omwille van de periodiciteit weten we dat

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |f(x) - (-f(x))| dx = 3 \int_0^{\pi} |f(x) - (-f(x))| dx.$$

Je kan dit ook zien op de schets in (a).

Omdat $f(x) \geq -f(x)$ voor alle $x \in [0, \pi]$ geldt

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}} |f(x) - (-f(x))| dx &= 3 \int_0^{\pi} |f(x) - (-f(x))| dx \\ &= 3 \int_0^{\pi} f(x) - (-f(x)) dx \\ &= 3 \int_0^{\pi} 2 \sin(x) dx \\ &= 6[-\cos(x)]_0^{\pi} \\ &= -6(\cos \pi - \cos 0) \\ &= -6 \cdot (-2) = 12 \end{aligned}$$

(c) Merk op: in (b) berekende we reeds G_3 want toen was onze bovengrens $\frac{5\pi}{2} = (3 - \frac{1}{2})\pi$. Hiervoor is het quotiënt gelijk aan

$$\frac{G_3}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

We bekijken G_n voor een algemene $n \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned} G_n &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{(n-\frac{1}{2})\pi} |f(x) - (-f(x))| dx = n \int_0^{\pi} |f(x) - (-f(x))| dx \\ &= n \int_0^{\pi} 2 \sin(x) dx \\ &= 2n[-\cos(x)]_0^{\pi} \\ &= 4n \end{aligned}$$

Nu we G_n kennen kunnen we het quotiënt bekijken:

$$\frac{G_n}{n} = \frac{4n}{n} = 4.$$

Opmerking: alleen de redenering voor $n = 3$ volstaat niet als beargumentering, maar kan wel inzicht geven over hoe je het kan aanpakken voor een algemene $n \in \mathbb{N}_0$.