Toets Algemene natuurkunde 1

Beste Student,

Deze toets telt mee voor 10% van je totaalscore, twee punten op twintig dus. Lees eerst aandachtig de vragen zodat je een duidelijk beeld hebt van wat de gegevens zijn en wat er gevraagd wordt. Denk er aan dat je, net zoals bij de proeftoets, je antwoorden voldoende moet verduidelijken zoals wat betekenen symbolen die je gebruikt in tekeningen of in formules, welke fysische principes heb je gebruikt om tot een antwoord te komen, ... Schrijf zo duidelijk mogelijk en zorg ervoor dat eventuele tekeningen voldoende groot zijn. Vergeet ook niet je naam te schrijven op elk blad dat je inlevert.

Veel succes!

Vraag 1 (4ptn)

De potentiële energie van een deeltje dat zich in het vlak beweegt wordt gegeven door

$$U = \alpha \ln(\beta r + \gamma)\,.$$

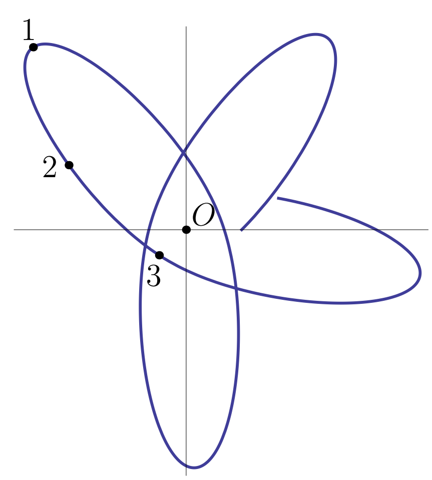
Hierbij zijn α, β en γ positieve constanten en is r de afstand van het deeltje tot de oorsprong O.

1) Bepaal, indien mogelijk, de dimensies van α, β en γ.

2) Welke kracht werkt er op het deeltje in?

3) Teken de krachtvector voor een drietal posities van het deeltje in het vlak.

4) De figuur toont een mogelijke baan van het deeltje op tijd t_1 is het in 1, op tijd t_2 in 2 en op tijd t_3 in 3. Hierbij is $t_1 < t_2 < t_3$ en de booglengte tussen 1 en 2 is gelijk aan deze tussen 2 en 3. Kan je iets meer zeggen over die tijden?



Oplossing

1) Je kan alleen maar zinnig de logaritme nemen van een dimensieloze grootheid en het resultaat is dan ook dimensieloos. Omdat je alleen maar grootheden van eenzelfde dimensie kan optellen (of vergelijken) moeten γ en βr dimensieloos zijn. Daarom is $[\gamma] = 1$ (γ is dimensieloos) en $[\beta] = \mathrm{L}^{-1}$. Omdat U een energie is, moet $[\alpha] = \mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$.

2) Met deze potentiaal komt een centrale kracht $\vec{F}$ overeen:

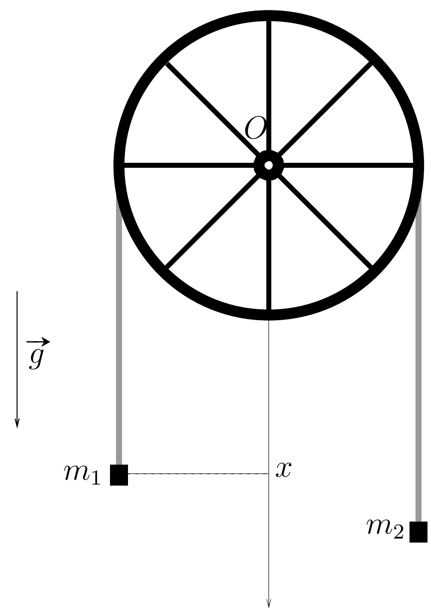
$$\vec{F} = -\mathrm{grad}(U) = -U'(r)\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\alpha\beta}{\beta r + \gamma}\,\hat{\mathbf{r}}\,.$$

3) De krachtvector in een punt P wijst naar de oorsprong en zijn grootte neemt af met de afstand van P tot de oorsprong.

4) Je kan je hier beroepen op behoud van energie: hoe verder het deeltje verwijderd is van de oorsprong, hoe groter zijn potentiële energie en dus hoe lager zijn (baan)snelheid. Daarom is $t_2 - t_1 > t_3 - t_2$. Je kan je ook beroepen op de perkenwet die voor elke centrale kracht geldt.

Vraag 2 (6ptn)

In de figuur wordt een machine van Attwood voorgesteld: dit systeem bestaat uit twee puntmassa's m_1 en m_2 met $0 < m_1 < m_2$ verbonden met een ideaal touw van lengte ℓ en een katrol van massa M, traagheidsmoment I en straal R. De katrol draait wrijvingsloos rond een vaste horizontale as door het punt O, loodrecht op het vlak van de tekening. Verder onderstellen we dat het touw zonder slippen over de katrol loopt. Tenslotte zorgen we ervoor dat de massa's m_1 en m_2 zuiver verticaal bewegen en kijken we naar dat deel van de beweging waarvoor er geen ongelukken gebeuren zoals een botsing van een massa met de katrol of met de grond. De hoogte van m_1 wordt bepaald door een coördinaat x zoals aangegeven op de figuur.



1. Schrijf de totale mechanische energie van het systeem op in functie van x en dx/dt.

2. Gebruik behoud van energie om de versnelling van m_1 te bepalen.

3. Bepaal de positie van m_1 op tijd $t > 0$ wetend dat op tijd $t = 0$ m_1 zich op hoogte x_0 bevindt met beginsnelheid nul.

4. Bepaal de hoogte van het massacentrum van het systeem.

5. Gebruik het impulsprincipe om de kracht te vinden die de as uitoefent op de katrol.

Oplossing

De massa m_1 zal naar boven bewegen en m_2 naar beneden. Ook de katrol zal in uurwerkwijzerzin beginnen draaien.

1) De totale mechanische energie is de som van kinetische energie en potentiële energie. Elk bewegend onderdeel draagt bij tot de kinetische energie, de massa's m_1 en m_2 voeren een lineaire beweging uit en de katrol een rotatie. Als m_1 over een afstand Δx stijgt dan daalt m_2 ook over Δx en draait de katrol over een hoek $\Delta x/R$. Zo vinden we

$$E^{\text{kin}} = \frac{1}{2}\,m_1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,m_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\,\frac{I}{R^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 .$$

De potentiële energie is, op een constante na, bepaald door de hoogte van m_1 en m_2 en gegeven door

$$E^{\text{pot}} = -m_1 g x + m_2 g x = (m_2 - m_1) g x \,.$$

Let op de tekens bij de berekening van de potentiële energie, hoe lager m_1 is, d.w.z. hoe groter x, hoe lager de potentiële energie is van m_1 in het zwaarteveld. De totale mechanische energie is daarom

$$E^{\text{mech}} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (m_2 - m_1) g x \,.$$

2) Behoud van energie druk je uit als $dE^{\text{mech}}/dt = 0$. Delen door dx/dt levert onmiddellijk

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}\, g \,.$$

3) Omdat de versnelling a van m_1 constant negatief is, voert m_1 een eenparig versnelde beweging uit naar boven. Gezien de gegeven beginwaarden, vinden we

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\,a t^2 = x_0 - \frac{1}{2}\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}\, g\, t^2 \,.$$

4) De x-coördinaat van het massacentrum wordt gegeven door het gewogen gemiddelde van de coördinaten van m_1, m_2 en de as van de katrol. De massa m_2 bevindt zich op hoogte $\ell - \pi R - x$ en de as van de katrol op hoogte nul. Daarom is

$$x_{\text{CM}} = \frac{m_1 x + m_2(\ell - \pi R - x)}{m_1 + m_2 + M} \,.$$

5) Het impulsprincipe zegt dat de tijdsafgeleide van het impuls van het massacentrum gelijk is aan de som van de uitwendige krachten die op het systeem inwerken:

$$(m_1 + m_2 + M)\frac{d^2 x_{\mathrm{CM}}}{dt^2} = (m_1 + m_2 + M)g - F\,.$$

Hierbij is F de grootte van de opwaarts gerichte kracht van de as op de katrol. Met 3) en 4) wordt dit

$$F = (m_1 + m_2 + M)g - \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1 + m_2 + I/R^2}g\,.$$