PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 26 november 2019

Familienaam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

- Schrijf op *elk* blad je naam.
- Begin voor *elke* vraag een nieuw blad.
- Schrijf 'BLANCO' op het *vragenblad* vóór het nummer van de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het *net* af.
- Schrijf *netjes* en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft. Geef dus *voldoende* uitleg.
- Het proefexamen duurt *2 uur*.

Veel succes!

Vraag 1 (10 ptn)	
Vraag 2 (10 ptn)	
2.(a)	
2.(b)	
2.(c)	

Vraag 3 (10 ptn)	
3.(a)	
3.(b)	

Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en veronderstel dat U en W deelruimten van V zijn. Toon aan dat

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

Vraag 2

Waar of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij V een vectorruimte met basis β en $U \subset V$ een deelruimte. Dan kan β uitgedund worden tot een basis van U.

Oplossing Deze uitspraak is fout. Beschouw het volgende tegenvoorbeeld. Zij $V = \mathbb{R}^2$ met als basis de standaardbasis $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ en $U = \text{vct}\{(1,1)\}$. Omdat β voortbrengend is voor $\mathbb{R}^2$ en $U \neq \mathbb{R}^2$, is β geen basis voor U. Het is ook duidelijk dat $\{(1,0)\}$ of $\{(0,1)\}$ geen basis voor U kan zijn omdat de vectoren $(1,0)$ en $(0,1)$ niet in U liggen. $U \neq \{0\}$ en dus is ook de lege verzameling geen basis voor U.

(b) Zij $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ gegeven kolomvectoren. Definieer de verzameling

$$V = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid AX_0 = AX_1\}.$$

Dan is V een deelruimte van $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Oplossing Deze uitspraak is waar. Om dit te bewijzen gaan we het deelruimte-criterium na. Ten eerste is V niet leeg want de nulmatrix behoort duidelijk tot V. Vervolgens, veronderstel $A, B \in V$ en $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig, dan moeten we aantonen dat $\lambda_1 A + \lambda_2 B \in V$. Omdat $A, B \in V$ vinden we het volgende:

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 B)X_0 = \lambda_1 AX_0 + \lambda_2 BX_0 = \lambda_1 AX_1 + \lambda_2 BX_1 = (\lambda_1 A + \lambda_2 B)X_1$$

zodat uit de definitie van V volgt dat $\lambda_1 A + \lambda_2 B \in V$.

(c) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rij-equivalente matrices. Als $\det(A) \neq 0$, dan is $\det(B) \neq 0$.

Oplossing Deze uitspraak is waar. Merk op dat A en B rij-equivalent zijn als en slechts als B bekomen kan worden door eindig veel elementaire rij-operaties uit te voeren op A. Het uitvoeren van een elementaire rijoperatie komt overeen met het links vermenigvuldigen met een elementaire matrix. Met andere woorden, als A en B rij-equivalent zijn, dan geldt:

$$B = E_k \cdots E_1 A$$

waar $E_1, \ldots, E_k$ elementaire matrices zijn. Merk op dat de determinant van een elementaire matrix nooit nul is. Nemen we dan aan beide kanten de determinant, dan vinden we:

$$\det(B) = \det(E_k \cdots E_1 A) = \det(E_k) \cdots \det(E_1)\det(A).$$

Uit bovenstaande opmerking en het gegeven volgt dat het rechterlid niet nul is, bijgevolg is dus de determinant van B niet nul.

Vraag 3

Zij $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ en beschouw de verzameling

$$V = \{P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \mid P(x_0) = 0 = P(x_1)\}.$$

(a) Toon aan dat V een deelruimte is van $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.

Oplossing We gaan opnieuw het deelruimtecriterium na. Het is duidelijk dat de nulfunctie tot V behoort en dus is V niet leeg. Stel vervolgens $P, Q \in V$ en λ_1, λ_2 willekeurig. We moeten bewijzen dat $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in V$. We vinden dan dat:

$$(\lambda_1 P + \lambda_2 Q)(x_0) = \lambda_1 P(x_0) + \lambda_2 Q(x_0) = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0.$$

Analoog vindt men dat $(\lambda_1 P + \lambda_2 Q)(x_1) = 0$, zodat uit de definitie van V volgt dat $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in V$.

(b) Bepaal voor alle $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ een basis voor V en bepaal voor alle $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ de dimensie van V.

Oplossing Noteer $P(x) = c + bx + ax^2$. Het is dan duidelijk dat $P \in V$ als en slechts als:

$$\begin{cases} a + bx_0 + cx_0^2 = 0 \\ a + bx_1 + cx_1^2 = 0 \end{cases}.$$

We moeten dus de oplossingsverzameling van bovenstaande *homogene* stelsel bepalen voor alle $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. We reduceren dus de bijhorende matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 \end{pmatrix}$$

Veronderstel dat $x_0 = x_1$. In dat geval bekomen we een nulrij. De oplossingsverzameling is dan:

$$\{(-(bx_0 + ax_0^2), b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Door een keer $a = 0$, $b = 1$ en een keer $a = 1$, $b = 0$ te stellen, besluiten we dat $\{x^2 - x_0^2, x - x_0\}$ een basis is voor V. De dimensie van V is dus gelijk aan 2.

We mogen nu veronderstellen dat $x_0 \neq x_1$. We kunnen dan de laatste rij delen voor $x_1 - x_0$ en bekomen we de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 0 & 1 & x_1 + x_0 \end{pmatrix}.$$

De oplossingsverzameling is dan:

$$\{(x_0 x_1 a, -(x_1 + x_0)a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

We vinden dus dat $\{(x^2 - (x_1 + x_0)x - x_0 x_1\}$ een basis voor V is en dus is de dimensie van V gelijk aan 1.