PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
donderdag 15 november 2012

Familienaam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Schrijf netjes en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het net af.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft, geef dus voldoende uitleg.

Veel succes!

---

1. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij U en W deelruimten van V. Bewijs:

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Hint: Kies op een doordachte manier basissen van $U \cap W$, U en W.

2. Zij $b \in \mathbb{R}$, definieer dan de volgende optelling en scalaire vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$:

$$x \boxplus y = x + y - b$$
$$\lambda \odot x = \lambda(x - b) + b.$$

Bewijs dat $\mathbb{R}$ uitgerust met $\boxplus$ en $\odot$ een vectorruimte is.

Oplossing We fixeren een willekeurig element $b \in \mathbb{R}$ en gaan alle axioma's van vectorruimten na.

- De optelling is inwendig omdat $+$ inwendig is. Inderdaad, voor willekeurige $x, y \in \mathbb{R}$ is $x \boxplus y = x + y - b \in \mathbb{R}$. Dat de optelling overal bepaald is, is evident.

- De optelling is associatief. Zij $x, y, z \in \mathbb{R}$, dan geldt
$$\begin{aligned}(x \boxplus y) \boxplus z &= (x + y - b) \boxplus z \\ &= (x + y - b) + z - b \\ &= x + (y + z - b) - b \\ &= x + (y \boxplus z) - b \\ &= x \boxplus (y \boxplus z).\end{aligned}$$
Hierbij gebruikten we de definitie van $\boxplus$, de associativiteit van $+$ en de commutativiteit van $+$.
- Het neutraal element is gelijk aan b. Inderdaad, voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt er $x \boxplus b = x + b - b = x$ en $b \boxplus x = b + x - b = x$.
- Zij $x \in \mathbb{R}$ een willekeurig element, dan is $2b - x$ het tegengesteld element van x. Inderdaad, $x \boxplus (2b - x) = x + 2b - x - b = b$ en b is het neutraal element. Er geldt natuurlijk ook dat $(2b - x) \boxplus x = 2b - x + x - b = b$.
- De optelling is commutatief. Zij $x, y \in \mathbb{R}$ willekeurige elementen, dan geldt wegens de commutativiteit van $+$ dat $x \boxplus y = x + y - b = y + x - b = y \boxplus x$.
- Er geldt distributiviteit-1. Zij $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$ willekeurige elementen. Dan geldt
$$\begin{aligned}\lambda \odot (x \boxplus y) &= \lambda \odot (x + y - b) \\ &= \lambda(x + y - b - b) + b \\ &= \lambda(x - b) + \lambda(y - b) + b \\ &= \lambda(x - b) + b + \lambda(y - b) + b - b \\ &= (\lambda \odot x) + (\lambda \odot y) - b \\ &= (\lambda \odot x) \boxplus (\lambda \odot y).\end{aligned}$$
- Er geldt distributiviteit-2. Zij $\lambda, \mu, x \in \mathbb{R}$ willekeurige elementen. Dan geldt
$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \odot x &= (\lambda + \mu)(x - b) + b \\ &= \lambda(x - b) + \mu(x - b) + b \\ &= \lambda(x - b) + b + \mu(x - b) + b - b \\ &= (\lambda \odot x) + (\mu \odot x) - b \\ &= \lambda \odot x \boxplus \mu \odot x.\end{aligned}$$
- Er geldt gemengde associativiteit. Zij $\lambda, \mu, x \in \mathbb{R}$ willekeurige elementen. Dan geldt
$$\begin{aligned}\lambda \odot (\mu \odot x) &= \lambda \odot (\mu(x - b) + b) \\ &= \lambda(\mu(x - b) + b - b)) + b \\ &= \lambda(\mu(x - b)) + b \\ &= \lambda\mu(x - b) + b \\ &= (\lambda\mu) \odot x.\end{aligned}$$
- Coëfficiënt 1: $1 \odot x = 1(x - b) + b = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Aangezien aan alle axioma's van vectorruimten is voldaan, is $\mathbb{R}$ uitgerust met $\boxplus$ en $\odot$ een vectorruimte.

Opmerkingen Enkele opmerkingen en veel gemaakte fouten:

- De opgave is klaar en duidelijk: $\mathbb{R}$ uitgerust met $\boxplus$ en $\odot$ is een vectorruimte, er wordt gevraagd dit te bewijzen. Er zal nooit (met opzet) een strikvraag worden gesteld op een examen. Als dus één van de axioma's van vectorruimten niet blijkt te kloppen, dan ligt dit aan een rekenfout. Schrijf dus zeker nooit "[...] dus het is geen vectorruimte".
- Het neutraal element is b, dus bij het zoeken naar de inverse van een element $x \in \mathbb{R}$ zoeken we een element $x' \in \mathbb{R}$ zodat $x \boxplus x' = b$ en <u>niet</u> $x \boxplus x' = 0$. In de cursus wordt het symbool 0 voor meerdere zaken gebruikt, enerzijds voor het reëel getal 0 en anderzijds voor het neutraal element van optelling. Zoals hier het geval is zijn deze twee niet altijd gelijk.
- Vergeet niet te vermelden dat $x, y, \lambda, \ldots$ willekeurige elementen zijn van $\mathbb{R}$.
- Vermijd het gebruik van symbolen die niet in de cusrus of oefenzittingen worden gebruikt, zoals bijvoorbeeld $a \stackrel{?}{=} b$ om aan te geven dat je niet weet of a gelijk is aan b, of $a \stackrel{!}{=} b$ om aan te geven dat a zeker en vast gelijk is aan b.

3. Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) We noemen een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stijgend indien $f(x) \leq f(y)$ voor alle $x \leq y$, en dalend indien $f(x) \geq f(y)$ voor alle $x \leq y$. Dan is

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ is stijgend of dalend}\}$$

een deelruimte van de vectorruimte $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ van alle reële functies.

(b) Zij $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ een basis van een gegeven vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Dan is $\{e_1 - e_n, e_2 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ een vrij deel in V.

Oplossing

(a) Deze uitspraak is FOUT. We tonen dit aan.
Bekijk hiervoor de functies

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$$

en

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -x.$$

De functie f is stijgend en g is dalend. Beiden zijn dus bevat in V. Merk nu op dat $(f+g)(0) = 0$, $(f+g)(1) = 0$ en $(f+g)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} < 0$. Hiermee kunnen we het volgende argumenteren:

- De functie $f + g$ kan niet stijgend zijn want $(f+g)(0) > (f+g)(\frac{1}{2})$ terwijl $0 < \frac{1}{2}$.
- De functie $f + g$ is ook niet dalend want $(f+g)(\frac{1}{2}) < (f+g)(1)$ terwijl $\frac{1}{2} < 1$.

De functie $f+g$ zit dus niet in V. De verzameling V kan dus geen deelruimte zijn.
Dit is slechts één tegenvoorbeeld, er zijn echter tal van tegenvoorbeelden. Zij bijvoobeeld f de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

en g de functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat f stijgend is en g dalend. Ga zelf na dat $f+g$ niet stijgend en niet dalend is.

(b) Deze uitspraak is WAAR.

Bewijs. Zij $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ zodat

$$\lambda_1(e_1 - e_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(e_{n-1} - e_n) = 0.$$

We herschrijven dit naar

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1} - (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) e_n = 0.$$

Omdat $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vrij is, verkrijgen we dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1}) = 0$. We hebben dus aangetoond dat $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$, wat betekent dat $\{e_1 - e_n, \ldots, e_{n-1} - e_n\}$ vrij is. □

Opmerkingen

- Schrijf eerst op of de uitspraak waar of vals is.
- De constante functies zijn dalend en stijgend. Een argument dat gebruikt dat deze functies niet in V zitten is dus fout.
- Velen gebruiken verkeerde definities en eigenschappen van lineair onafhankelijk.

4. Bespreek het volgende stelsel met twee reële parameters a en b.

$$\begin{cases} -2x - 2y + (b - 7a)z &= 0 \\ -x - y - 3az &= -2b \\ x + (a+1)y + 2az &= 2b \end{cases}$$

Geef voor elke waarde van a en b in $\mathbb{R}$ de oplossingsverzameling van dit stelsel.

Oplossing We zetten het stelsel eerst in een uitgebreide matrix en proberen deze matrix naar echelonvorm te brengen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & b-7a & 0 \\ -1 & -1 & -3a & -2b \\ 1 & a+1 & 2a & 2b \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ -1 & -1 & -3a & -2b \\ 2 & -2 & b-7a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 2a & b-3a & 4b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 4b \end{array}\right)$$

Om verder te kunnen gaan, moeten we nu verschillende gevallen onderscheiden. Om in de tweede kolom een leidende 1 te krijgen, zouden we willen delen door a. Daarom maken we gevalsonderscheid tussen $a = 0$ en $a \neq 0$.

(a) *Geval* $a = 0$. Dan wordt de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 4b \end{array}\right).$$

Hierdoor moeten we gevalsonderscheid maken tussen $b = 0$ en $b \neq 0$.

i. *Geval* $b = 0$. Dan wordt de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

en de oplossingsverzameling is $\{(\lambda, -\lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

ii. *Geval* $b \neq 0$. Dan kunnen we de laatste rij delen door b:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 4b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 \cdot \frac{1}{b}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

De oplossingsverzameling is dus $\{(2b - \lambda, \lambda, 4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b) *Geval* $a \neq 0$. Dan kunnen we de tweede rij van de matrix delen door a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 4b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_2 \cdot \frac{1}{a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 4b \end{array}\right)$$

Nu maken we gevalsonderscheid tussen $b - a = 0$ en $b - a \neq 0$. Dit is equivalent met de gevallen $b = a$ en $b \neq a$.

i. *Geval* $a = b$. Dan wordt de matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2a \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a \end{array}\right).$$

Aangezien $a \neq 0$ krijgen we een strijdig stelsel, dus de oplossingsverzameling is de lege verzameling.

ii. *Geval* $a \neq b$. Dan kunnen we de laatste rij delen door $b - a$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 4b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_3 \cdot \frac{1}{b-a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a+1 & 2a & 2b \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{4b}{b-a} \end{array}\right).$$

Na achterwaartse substitutie vinden we als oplossingsverzameling

$$\left\{\left(2b - (3a+1)\frac{4b}{b-a}, \frac{4b}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right)\right\}.$$

We vatten de bespreking van het stelsel nog samen:

- Als $a = 0$ en $b = 0$, hebben we als oplossingsverzameling

$$V = \{(\lambda, -\lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

- Als $a = 0$ en $b \neq 0$, is de oplossingsverzameling $V = \{(2b - \lambda, \lambda, 4) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Als $a \neq 0$ en $a = b$, is de oplossingsverzameling $V = \emptyset$.
- Als tenslotte $a \neq 0$ en $a \neq b$, vinden we als oplossingsverzameling

$$V = \left\{\left(\frac{2b(b - 7a - 2)}{b-a}, \frac{4b}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right)\right\}.$$

Opmerkingen

- Let goed op de notatie van verzamelingen, hier gebeurden heel veel fouten mee.
  - $\{\emptyset\}$ is niet hetzelfde als $\emptyset$.
  - De verzameling $\{0, 0, 0\}$ is een deel van $\mathbb{R}$ en kan dus geen oplossingsverzameling voorstellen van het stelsel. De correcte schrijfwijze is dus $\{(0, 0, 0)\}$.
  - De voorwaarden op de parameters a en b moeten niet meer vermeld staan binnen de oplossingsverzameling. In ons stelsel in het geval $a \neq 0$ en $b \neq a$ is dit **geen correcte schrijfwijze** voor de oplossingsverzameling:

$$\left\{\left(\frac{2b(b - 7a - 2)}{b-a}, \frac{4b}{b-a}, \frac{4b}{b-a}\right) \mid a \in \mathbb{R}_0, b \in \mathbb{R} \setminus \{a\}\right\}.$$

Als je dit opschrijft is er geen unieke oplossing, maar zijn er juist oneindig veel oplossingen.

- Je kan het getal $\frac{1}{a}$ pas opschrijven als je eerst al gezegd hebt dat $a \neq 0$.
- De vergelijking $bz = 4b$ is alleen equivalent met $z = 4$ als $b \neq 0$.
- Kijk goed na of je de opgave niet fout hebt overgeschreven.
- Schrijf je rijoperaties op. Als je een rekenfout maakt is dit heel erg belangrijk.
- Je hoeft een stelsel niet te herleiden tot rijgereduceerde vorm, je kan ook herleiden tot echonlonvorm en dan verdergaan met achterwaartse substitutie.