PROEFEXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
dinsdag 19 november 2013

Familienaam: ....

Voornaam: ....

Richting: ....

- Schrijf op *elk* blad je naam.
- Begin voor *elke* vraag een nieuw blad.
- Schrijf 'BLANCO' op het *vragenblad* vóór het nummer van de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het *net* af.
- Schrijf *netjes* en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft, geef dus *voldoende* uitleg.

Veel succes!

---

1. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V. Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V, dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

   Mogelijke hint: gebruik de theorie van stelsels van eerstegraadsvergelijkingen.

   Oplossing: Zie handboek.

2. Voor welke waarden van $a, b \in \mathbb{R}$ is

   $$\{(a, -a, a, 2a), (a, -b, 2a - b, a + b), (0, b, 2b - 1, -b), (-a, 3a, 1 + a, -3a)\}$$

   een vrij deel van $\mathbb{R}^4$?

   Oplossing: We gaan na of deze vier vectoren vrij zijn. Hiervoor kijken we naar het stelsel

   $$\lambda_1(a, -a, a, 2a) + \lambda_2(a, -b, 2a-b, a+b) + \lambda_3(0, b, 2b-1, -b) + \lambda_4(-a, 3a, 1+a, -3a) = 0 \quad (*)$$

   waarbij $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. We schrijven de coëfficiëntenmatrix op van dit stelsel en herleiden dit tot een matrix in echelonvorm.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & a & 0 & -a & 0 \\ -a & -b & b & 3a & 0 \\ a & 2a-b & 2b-1 & 1+a & 0 \\ 2a & a+b & -b & -3a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \leftrightarrow R_4 - 2R_1]{\substack{R_2 \leftrightarrow R_2 + R_1 \\ R_3 \leftrightarrow R_3 - R_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a-b & b & 2a & 0 \\ 0 & a-b & 2b-1 & 1 & 0 \\ 0 & b-a & -b & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \leftrightarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftrightarrow R_4 + R_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} a & a & 0 & -a & 0 \\ 0 & a-b & b & 2a & 0 \\ 0 & 0 & b-1 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$$

De vier vectoren zijn vrij als en slechts als het stelsel in (*) alleen de nulvector als oplossing heeft. Omdat we vier vergelijkingen in vier veranderlijken hebben, moet de matrixvorm dan te herleiden zijn naar een eenheidsmatrix. Dit kan alleen maar als de elementen op de hoofddiagonaal allemaal verschillend van nul zijn.

De vier vectoren zijn dus vrij als en slechts als $a \neq 0$, $b \neq 1$ en $a \neq b$.

Alternatieve methode: We hebben gezien dat n vectoren $v_1, v_2 \dots, v_n$ in $\mathbb{R}^n$ vrij zijn als en slechts als de determinant van de bijhorende matrix $(v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$ verschillend is van 0. Wegens de berekeningen hierboven is de determinant in dit geval gelijk aan $a^2(a-b)(b-1)$, dus de gegeven vectoren zijn vrij als en slechts als $a \neq 0$, $b \neq 1$ en $a \neq b$.

3. Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zodat $A^2 = \mathbb{I}_n = B^2$. Dan is $AB = BA$.

   (b) Zij $V \neq \{0\}$ een vectorruimte en zij $v \in V$. Dan is

$$\dim(\mathrm{vct}\{V \setminus \{v\}\}) = \dim V.$$

Oplossing:

(a) Dit is *fout.*

Neem bijvoorbeeld $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dan is $A^2 = B^2 = \mathbb{I}_2$, maar $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Dit is *waar.*

Noteer voor de rest van de vraag $W = \mathrm{vct}\{V \setminus \{v\}\}$, we bewijzen dat $\dim W = \dim V$. Aangezien $W \subseteq V$, volstaat het hiervoor te bewijzen dat $V \subseteq W$. Aangezien $V \setminus \{v\} \subseteq W$, volstaat het aan te tonen dat $v \in W$.

- Veronderstel eerst dat $v = 0$. Aangezien 0 tot elke deelruimte behoort, is ook $0 \in W$.

- Veronderstel nu dat $v \neq 0$. Merk op dat $v \neq 2v$. Inderdaad, stel dat $v = 2v$, dan is $0 = 2v - v = v$ en we hebben verondersteld dat dit niet waar is. Nu geldt er dat $v = 1 \cdot v = (\frac{1}{2} \cdot 2) \cdot v = \frac{1}{2} \cdot (2v)$ en dus is v een lineaire combinatie van elementen uit $V \setminus \{v\}$. Per definitie van W is dus $v \in W$. Alternatief kan je opmerken dat als $v \neq 0$, dan $v \neq -v$ en dus $v = (-1)(-v)$ waaruit opnieuw volgt dat $v \in W$.

4. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ verschillende getallen. Definieer

$$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \text{ dan is } f(x) = 0\}.$$

(a) Toon aan: V is een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, de vectorruimte van functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$.

(b) Geef een basis en de dimensie van V.

Oplossing:

(a) We tonen dit aan met behulp van het deelruimtecriterium (Stelling 3.11). Ten eerste merken we op dat V niet leeg is, aangezien $0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0$ duidelijk een element is van V. Zij $f, g \in V$ en $r, s \in \mathbb{R}$. We tonen aan dat $rf + sg \in V$. Zij $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dan is $(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x) = 0$, aangezien f en g elementen zijn van V en dus $f(x) = 0 = g(x)$.

(b) Definieer voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ de functie

$$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x = a_i, \\ 0 & \text{als } x \neq a_i. \end{cases}$$

Het is duidelijk dat $f_i \in V$ voor alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. We beweren dat $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ een basis is van V.

i. Veronderstel dat $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ voor bepaalde getallen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dit is een gelijkheid van functies, dus voor elke $x \in \mathbb{R}$ moet gelden dat $(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)(x) = 0(x) = 0$. Voor $x = a_j$ wil dit zeggen dat

$$\begin{aligned} 0 &= (\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i)(a_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(a_j) \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

Dus $\lambda_j = 0$ voor elke $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en dus is $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ vrij wegens Propositie 3.26.

ii. Zij $g \in V$; we beweren dat $g = g(a_1)f_1 + g(a_2)f_2 + \cdots + g(a_n)f_n$. Dit is een gelijkheid van functies, dus om de bewering aan te tonen moeten we bewijzen dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$g(x) = g(a_1)f_1(x) + g(a_2)f_2(x) + \cdots + g(a_n)f_n(x). \qquad (1)$$

Als $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, dan is hier duidelijk aan voldaan aangezien $g, f_1, f_2, \ldots, f_n \in V$. Indien $x = a_j$ voor een bepaalde $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dan is het linkerlid van (1) gelijk aan $g(a_j)$, en het rechterlid van (1) gelijk aan

$$g(a_1)f_1(a_j) + g(a_2)f_2(a_j) + \cdots + g(a_n)f_n(a_j) = g(a_j)$$

wegens de definitie van f_i. Een willekeurig element $g \in V$ is dus te schrijven als lineaire combinatie van de vectoren $f_1, f_2, \ldots f_n$, dus $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ is voortbrengend.

Aangezien $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ vrij is en voorbrengend, is het een basis en de dimensie van V is dus gelijk aan n.