

Proefexamen Lineaire Algebra – Fysica & Wiskunde

November 2024

Modeloplossing en toelichting

De drie vragen van het proefexamen hebben een gelijk gewicht in de totaalscore van het proefexamen.

Vraag 1

Opgave

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ een deelverzameling van m vectoren uit V . Bewijs het lemma van Steinitz: als A voortbrengend is voor V , dan is een willekeurige deelverzameling van V met meer dan m elementen lineair afhankelijk.

Modeloplossing en toelichting

Er wordt hier gevraagd om Stelling 3.35 uit het handboek te bewijzen. Deze vraag werd verbeterd op een totaal van 8 punten. De volgende elementen zijn van belang in een correct antwoord. De bijhorende letters staan aangegeven op de verbeterde kopijen.

Je kiest een willekeurige verzameling $\{y_1, \dots, y_n\}$ met $n > m$ vectoren. Je moet bewijzen dat deze verzameling van vectoren lineair afhankelijk is.

- (a) (op 2 punten) Je schrijft elke vector y_i als een lineaire combinatie van de vectoren $\{x_1, \dots, x_m\}$. Je vermeldt hierbij expliciet dat je gebruikt dat $\{x_1, \dots, x_m\}$ voortbrengend is.
- (b) (op 1 punt) Je vermeldt expliciet dat je moet bewijzen dat er coëfficiënten λ_i bestaan, niet alle 0, zodanig dat $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$.
- (c) (op 2 punten) Je herschrijft de som $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ als een lineaire combinatie van de vectoren x_j , aan de hand van punt (a) hierboven.
- (d) (op 2 punten) Je leidt hieruit een homogeen stelsel af met m vergelijkingen en n onbekenden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Je legt uit dat het *voldoende* is om aan te tonen dat dit stelsel een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft.
- (e) (op 1 punt) Je verwijst naar de theorie van stelsels om te besluiten dat een homogeen stelsel met meer onbekenden dan vergelijkingen altijd een oplossing verschillend van de nuloplossing heeft.
- Enkele studenten maken gebruik van de theorie van dimensie van een vectorruimte. Dat is hier niet toegelaten omdat het Lemma van Steinitz net het cruciale lemma is waaruit de theorie van dimensie afgeleid wordt. Je krijgt dan geen punten voor deze vraag. Op de examenkopij staat dan de letter (f).

- Enkele studenten gaan ervan uit dat $\{x_1, \dots, x_m\}$ een deelverzameling is van $\{y_1, \dots, y_n\}$. Dan wordt het bewijs natuurlijk onterecht makkelijk. Op de examenkopij staat dan de letter (g) en je krijgt 1/8.
- Een aantal studenten schrijven de vectoren y_i als lineaire combinatie $y_i = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$ van de vectoren $\{x_1, \dots, x_m\}$ op een manier waarbij de coëfficiënten α_j niet afhangen van i . Dat is niet juist omdat dan alle vectoren y_i gelijk zouden zijn. Dit zorgt dan ook voor vreemde dingen bij punten (c) en (d) van het argument, waardoor deze studenten zowel bij (b), (c) als (d) maar een deel van de punten krijgen.
- Een aantal studenten bekomen in (d) een stelsel met $x_1, \dots, x_m$ als onbekenden. Dat heeft geen betekenis omdat $x_1, \dots, x_m$ vectoren in V zijn.

Vraag 2

Opgave

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- Veronderstel dat $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ een matrix is en dat $X_1, \dots, X_s \in \mathbb{R}^n$ kolomvectoren zijn. Als de kolomvectoren $\{A \cdot X_1, \dots, A \cdot X_s\}$ vrij zijn, dan zijn ook de kolomvectoren $\{X_1, \dots, X_s\}$ vrij.
- Voor alle matrices $A, B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ geldt dat $\text{rijrang}(A + B) \geq \min\{\text{rijrang}(A), \text{rijrang}(B)\}$.
- Veronderstel dat V een 7-dimensionale reële vectorruimte is met deelruimten $U, W \subset V$ met $\dim(U) = 4$ en $\dim(W) = 5$. Dan is $\dim(U \cap W) \geq 2$.

Modeloplossing en toelichting

- Deze uitspraak is waar. Inderdaad: stel dat $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$ voldoen aan

$$\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_s X_s = 0.$$

We moeten bewijzen dat alle $\lambda_i = 0$. Beide leden vermenigvuldigen met A geeft dat

$$\lambda_1 A \cdot X_1 + \dots + \lambda_s A \cdot X_s = 0.$$

Aangezien de verzameling $\{A \cdot X_1, \dots, A \cdot X_s\}$ vrij is, volgt dat $\lambda_i = 0$ voor alle i .

- Deze uitspraak is niet waar. Zij $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ de matrix met $A_{ij} = 1$ voor alle i, j met $1 \leq i \leq k$ en $1 \leq j \leq n$. Zij $B = -A$. Dan is $A + B = 0$; bijgevolg is de rijruimte van $A + B$ de nulruimte, zodat $\text{rijrang}(A + B) = 0$. Omdat A noch B de nulmatrix zijn, hebben ze allebei een niet-nul rijruimte en bijgevolg zal $\min\{\text{rijrang}(A), \text{rijrang}(B)\} \geq 1$, zodat $\text{rijrang}(A + B) < \min\{\text{rijrang}(A), \text{rijrang}(B)\}$.

- (c) Deze uitspraak is waar. Merk op dat $U + W \subset V$; bijgevolg is $\dim(U + W) \leq \dim V = 7$. We verkrijgen dat

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) \geq 4 + 5 - 7 = 2.$$

Elke deelvraag werd verbeterd op 2 punten; in totaal werd deze vraag verbeterd op 6 punten. Voor een antwoord dat enkel bestaat uit de uitspraak waar/niet waar zonder verdere motivatie krijg je geen punten.

- (a) Een correct antwoord schrijft een lineaire combinatie van $X_1, \dots, X_s$ gelijk aan 0, vermenigvuldigt deze vergelijking met A en concludeert met het gegeven dat $\{AX_1, \dots, AX_s\}$ vrij is. Een voor de rest correct antwoord dat niet expliciet vermeldt waar het gegeven gebruikt wordt, krijgt 1.5 punten. Een antwoord dat tot de vergelijking $\lambda_1 AX_1 + \dots + \lambda_s AX_s = 0$ komt maar hier niet uit besluit, krijgt 1 punt.
- (b) Een correct antwoord bestaat uit een tegenvoorbeeld met motivatie waarom dit tegenvoorbeeld correct is. Een correct tegenvoorbeeld zonder motivatie krijgt 1 punt.
- (c) Een correct antwoord toont aan dat $\dim(U + W) \leq 7$ en concludeert met de formule

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Een antwoord dat $\dim(U + W) \leq 7$ gebruikt zonder motivatie krijgt 1.5 punten.

Vraag 3

Opgave

Voor elke reële vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$, deelruimte $W \subset V$ en vector $v \in V$ definiëren we de deelverzameling $v + W \subset V$ als

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}.$$

- (a) Voor welke $v \in V$ is $v + W$ een deelruimte van V en voor welke $v \in V$ is $v + W$ geen deelruimte van V ? Bewijs je antwoord.
- (b) Veronderstel dat $u, v \in V$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn.
- 1) $u + W = v + W$.
 - 2) $(u + W) \cap (v + W) \neq \emptyset$.
 - 3) $u - v \in W$.
- (c) Veronderstel dat $U, W \subset V$ twee deelruimten zijn. Bewijs dat $U \cap W = \{0\}$ als en slechts als $(u + W) \cap (v + W) = \emptyset$ voor alle $u, v \in U$ met $u \neq v$.

Modeloplossing en toelichting

(a) We tonen aan dat $v + W$ een deelruimte is als en slechts als $v \in W$.

$\Rightarrow$ Stel dat $v + W$ een deelruimte is. In het bijzonder is $0 \in v + W$. Dus is er een $w \in W$ zodat $v + w = 0$. Dus is $v = -w \in W$.

$\Leftarrow$ (methode 1) Zij $v \in W$. We bewijzen dat $v + W$ een deelruimte is door aan te tonen dat $v + W = W$, wat per aanname een deelruimte is. Zij $w \in W$ willekeurig. Dan is $w = v + (w - v) \in v + W$ want $w - v \in W$. Dus is $W \subset v + W$. Omgekeerd, zij $u \in v + W$. Dan is er een $w \in W$ zodat $u = v + w \in W$. Dus $v + W \subset W$.

$\Leftarrow$ (methode 2) We gebruiken het deelruimtecriterium.

- $v + 0 \in v + W$ zodat $v + W \neq \emptyset$.
- Zij $u = v + w \in v + W$ met $w \in W$ en zij $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\lambda u = \lambda v + \lambda w = v + ((\lambda - 1)v + \lambda w).$$

Omdat $v, w \in W$ en W een deelruimte is, is ook $(\lambda - 1)v + \lambda w \in W$ zodat $\lambda u \in v + W$.

- Zij $u_1 = v + w_1$ en $u_2 = v + w_2$ elementen van $v + W$ met $w_1, w_2 \in W$. Dan is

$$u_1 + u_2 = v + (v + w_1 + w_2).$$

Aangezien W een deelruimte is, weten we dat $v + w_1 + w_2 \in W$ zodat $u_1 + u_2 \in v + W$.

(b) We bewijzen de cirkel van implicaties $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$

$1) \Rightarrow 2)$ Als $u + W = v + W$ dan is $(u + W) \cap (v + W) = v + W$, wat niet leeg is.

$2) \Rightarrow 3)$ Neem $a \in (u + W) \cap (v + W)$, dan bestaan er $w_1, w_2 \in W$ zodat $a = u + w_1 = v + w_2$. Dan is $u - v = w_2 - w_1 \in W$.

$3) \Rightarrow 1)$ Zij $a = u + w \in u + W$ met $w \in W$. Dan is $a = v + ((u - v) + w)$. Omdat $u - v \in W$, $w \in W$ en W een deelruimte is, is ook $(u - v) + w \in W$, zodat $a \in v + W$. Dus is $u + W \subset v + W$. Zij omgekeerd $a = v + w \in v + W$ met $w \in W$. Dan is $a = u + (w - (u - v))$. Net zoals hierboven is $w - (u - v) \in W$, zodat $a \in u + W$. Dus is $v + W \subset u + W$.

(c) $\Rightarrow$ Zij $u, v \in U$ met $u \neq v$. Dan is $u - v \neq 0$ en $u - v \in U$. Omdat $U \cap W = \{0\}$, volgt dat $u - v \notin W$. Uit de equivalentie van 2) en 3) in opgave (b) volgt dat $(u + W) \cap (v + W) = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Zij $u \in U \cap W$. Dan is $u - 0 \in W$. Uit de equivalentie van 2) en 3) in opgave (b) volgt dat $(u + W) \cap (0 + W) \neq \emptyset$. Omdat we aangenomen hebben dat $(u + W) \cap (v + W) = \emptyset$ voor alle $u, v \in U$ met $u \neq v$, moet $u = 0$. Dus is $U \cap W = \{0\}$.

Deze vraag werd verbeterd op een totaal van 9 punten.

(a) Deze deelvraag staat op 3 punten.

- 0.5 punt voor de formulering van het juiste criterium dat $v + W$ een deelruimte is als en slechts als $v \in W$.

- 1 punt voor het bewijs van de implicatie: $v + W$ is een deelruimte $\implies v \in W$
- 1.5 punt voor het bewijs van de implicatie: $v \in W \implies v + W$ is een deelruimte.
- Wie methode 2 gebruikt, krijgt een half punt per onderdeel van het deelruimtecriterium dat juist bewezen wordt.

(b) Deze deelvraag staat op 3 punten. De puntenverdeling hangt af van de oplossingsmethode.

- 1 punt per implicatie voor wie een cirkel van drie implicaties gebruikt.
- $\frac{3}{4}$ punt per implicatie voor wie twee equivalenties (en dus vier implicaties) bewijst.

(c) Deze deelvraag staat op 3 punten. Er staat 1.5 punt op elk van beide implicaties.