Proefexamen Thermodynamica, april 2017
Oplossingen

1 (In)exacte differentialen

De eerste differentiaal is niet exact aangezien

$$\frac{\partial}{\partial V}\frac{Nk}{V} \neq \frac{\partial}{\partial T}\frac{NkT}{V^2}$$

De tweede differentiaal is echter wel exact. Het voorschrift voor P is van de vorm

$$P(T, V, N) = \frac{N^2 T}{V} + \frac{a}{2}N^2 T^2 + c$$

met $c \in \mathbb{R}$ een willekeurige constante.

2 Pompen doe je van beneden

1. Omdat $\rho_{H_2O} = 1\, kg/l$ constant is en de pijp een constante diameter en dus een constante doorsnede A heeft, zien we uit massa-behoud

   $$\rho A v = Cte$$

   dat de stroomsnelheid v overal constant is doorheen de leiding.

2. In de wet van Bernoulli zien we dus dat enkel de termen $P(h)$ en $\rho g h$ van de hoogte afhangen, en wel als volgt

   $$P(h) = 4\, bar - \rho g h = (4 - 10^{-1} h) bar \tag{2.1}$$

   (met h in eenheden van meter)

3. Een standaard-oefening (ook gemaakt in de oefenzittingen) leert ons dat de kookpuntsdrukverlaging bij de gegeven approximaties gegeven wordt door ($M = 18 g/mol$ is de molaire massa van water)

   $$\frac{P_{80°C}}{P_{100°C}} = \exp\left(\frac{ML}{R}\left(\frac{1}{100K} - \frac{1}{80K}\right)\right) = 0,47 \tag{2.2}$$

   zodat de kookdruk bij 80°C 0,48 bar bedraagt. Als we vergelijken met (2.1) zien we dat de hypothese van onsamendrukbare, laminaire, onvisceuze stroming zonder koken dan enkel kan indien

   $$P_{min} = 4 - 10^{-1} h_{max} > 0,48$$

   Of nog

   $$h_{max} < 40 - 4,8 = 35,2\,(\text{meter})$$

3 Uitzetting

a) Zoals we weten is $Q_{k\to w} + Q_{w\to k} = 0$, zodat $m_k c_k (T_h - T_f) = m_w c_w (T_f - T_h)$, of ook

$$T_f = \frac{m_k c_k T_h + m_w c_w T_f}{m_k c_k + m_w c_w} \approx 347 \text{ K}. \tag{3.1}$$

b)We berekenen

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial T} \quad \Rightarrow \quad V_f = V_0 e^{\beta \Delta T} \approx V_0 e^{3\alpha \Delta T} \approx 0.619 \text{ dm}^3 \tag{3.2}$$

4 Container gevuld met ideaal gas

Het volume in de cilinder, als functie van de hoogte h, wordt gegeven door

$$V(h) = V_0 + A(h - h_0)$$

Aangezien alle onderdelen die het opgesloten gas omringen geen warmtetransport toelaten, moet het gas adiabatisch transformeren. Daarom hebben we dat

$$P(h) = P_0 \left(\frac{V_0}{V(h)}\right)^{\gamma}$$
$$T(h) = T_0 \left(\frac{V_0}{V(h)}\right)^{\gamma-1}$$

waarin $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} > 1$. Beweringen 1 en 6 zijn dus waar terwijl bewering 7 onwaar is. Voor bewering 2 observeren we dat in de rusttoestand bij $h = h_0$ en bij de andere toestand (vlak voor loslaten) de piston in rust is, zodat er in beide situaties geen kinetische energie is. Enkel de interne energie $E_{int}(h)$ van het gas en de potentiële energie mgh van de piston spelen dus een rol (de gravitationele potentiële energie van het gas verwaarlozen we). We kunnen gebruiken dat bij adiabatische transformaties $P(h) = -\frac{dE_{int}}{dV}(V(h)) = -A^{-1}\frac{dE_{int}}{dh}(h)$. Uit het kracht-evenwicht bij $h = h_0$ volgt ook dat

$$A(P(h_0) - P_{atm}) - mg = 0$$

hetgeen dus herschreven kan worden als

$$-\frac{dE_{int}}{dh}(h_0) - AP_{atm} - \frac{dE_{pot}}{dh}(h_0) = 0$$

zodat $E(h) = E_{int}(h) + E_{int}(h_0)$ een negatieve afgeleide heeft bij $h = h_0$ en daarom kleiner is dan $E(h_0)$ indien we h een beetje groter nemen dan h_0. Bewering 2 is dus waar. Voor de overblijvende beweringen moeten we een idee vormen van de beweging van de piston. Schrijven we de 2e wet van Newton op voor de piston:

$$m\frac{d^2 h}{dt^2} = A(P(h) - P_{atm}) - mg \tag{4.1}$$

(waar we alle wrijvingskrachten verwaarloosd hebben, hetgeen volgens de omschrijving in de opgave accuraat is op voldoende korte tijdschalen). Een mogelijke piste is nu om de krachten in het rechterlid te gaan benaderen tot op lineaire orde rond de evenwichtshoogte h_0 (herinner dat we maar een kleine perturbatie hebben toegepast op de piston). Dan hebben we

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = AP'(h_0)(h-h_0) + O((h-h_0)^2)$$

De tweede-orde fout negeren en de bekomen differentiaalvergelijking integreren geeft een oplossing van de vorm

$$h(t) = h_0 + \delta h \cos\left(\sqrt{\frac{AP'(h_0)}{m}}\, t + \phi_0\right) + O(\delta h^2)$$

3 is dus onwaar, 4 is onwaar, 5 is waar, 8 is onwaar. Voor een meer rigoureuze kijk op de beweging van de piston, vermenigvuldigen we de bewegingsvergelijking (4.1) met $\frac{dh}{dt}$ en integreren we naar de tijd, i.e. $\int_0^t dt'$.... Men bekomt

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = E_{tot} - E_{int}(h) - AP_{atm}h - mgh \tag{4.2}$$

met E_{tot} een integratieconstante die afhangt van de begintoestand bij $t=0$ en de interpretatie van totale energie heeft. Men kan nagaan dat het rechterlid divergeert naar $-\infty$ wanneer $h \to +\infty$ (o.w.v. de termen $AP_{atm}h - mgh$ en wanneer $h \to h_{MIN}$ (o.w.v. $E_{int}(h)$) en dus slechts positief is op een begrensde verzameling I, waarvan men kan nagaan dat $I = [h_{min}, h_{max}]$ een interval is. In het inwendige (h_{min}, h_{max}) is het rechterlid strikt positief en heeft de piston een van nul verschillende snelheid die volledig door de hoogte h bepaald is. Wanneer $h(t)$ aankomt in een eindpunt (h_{min} of h_{max}) kan is $h'(t) = 0$ (noodzakelijkerwijs) maar uit (4.1) ziet men dan weer dat $h''(t)$ resp. strikt positief of strikt negatief is. Bijgevolg verlaat de piston de eindpunten ogenblikkelijk na aankomst. Laten we met deze informatie aantonen dat $t \mapsto h(t)$ τ-periodisch is, met

$$\tau = 2\int_{h_{min}}^{h_{max}} \sqrt{\frac{2}{m(E_{tot} - E_{int}(h) - AP_{atm}h - mgh)}}dh'$$

Door in (4.2) de wortel te nemen en de veranderlijken h en t te splisen in, i.e.

$$\sqrt{\frac{2}{m(E_{tot} - E_{int}(h) - AP_{atm}h - mgh)}}\, dh = dt$$

en te integreren tussen h_{min} en h_{max} krijgt men dat de $\tau/2$ hierboven de benodigde tijd is waarin de piston oversteekt van h_{min} naar h_{max} of omgekeerd. Nu moeten we aantonen dat voor alle t, $h(t) = h(t+\tau)$ en $\frac{dh}{dt}(t) = \frac{dh}{dt}(t+\tau)$.

1. Na t reist de piston in één richting tot hij aankomt bij h_{min} of h_{max} daar komt hij tot stilstand maar maakt wel ogenblikkelijk rechtsomkeert (geen rustpauze).

2. Vervolgens steekt de piston het interval I in de omgekeerde richting over gedurende een tijdsinterval van lengte $\tau/2$.

3. Bij het andere eindpunt aangekomen maakt de piston weer ogenblikkelijk rechtsomkeert om finaal na een possje weer bij $h(t)$ uit te komen

4. De gecombineerde tijdsduur van de reisjes beschreven in puntje 1. en 3. telt op tot $\tau/2$. Dit omdat we die twee stukken bij $h = h(t)$ "mooi aan elkaar kunnen plakken" waarna het uit dit knip-en-plak-werk resulterend baanfragment overeenkomt met een enkele normale oversteek van het interval I.

We zien bijgevolg dat $t + \tau = \min\left\{t' > t \,|\, h(t') = h(t),\ \frac{dh}{dt}(t') = \frac{dh}{dt}(t)\right\}$. Tussen haakjes: wanneer $h(t_1) = h(t_2)$ hebben we uit energie-behoud dat $\frac{dh}{dt}(t_1) = \pm\frac{dh}{dt}(t_2)$. In puntje 2. van het boven geschetste reisverslag zien we dat de piston ook reeds ergens op hoogte $h(t)$ terugkomt (vroeger dan $t+\tau$) maar daar heeft de piston dus een snelheid die het tegengestelde van $\frac{dh}{dt}(t)$ is.

5 IJs smelten

De verandering in entropie kan men als volgt uitrekenen:

$$\Delta S = \frac{mL}{T} \approx 1.22 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}. \tag{5.1}$$

De verandering in enthalpie is:

$$\Delta H = \Delta E + P\Delta V = Q = 3.33 \cdot 10^6 \mathrm{J}. \tag{5.2}$$

Voor de Gibbs vrije energie hebben we:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = 0. \tag{5.3}$$

6 Mengsels

Zie het einde van het eerste deel van de cursus.

7 Faseovergangen bij zwarte gaten

a) De oppervlakte is gegeven door

$$\begin{aligned} A &= 4\pi R^2 && (7.1)\\ &= \pi\left(r_s + \sqrt{r_s^2 - 4r_q^2}\right)^2 && (7.2)\\ &= \pi\left(\frac{2GM}{c^2} + \sqrt{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 - \frac{q^2G}{\pi\varepsilon_0 c^4}}\right)^2 && (7.3)\\ &= \pi\left(\frac{2GE}{c^4} + \sqrt{\left(\frac{2GE}{c^4}\right)^2 - \frac{q^2G}{\pi\varepsilon_0 c^4}}\right)^2 && (7.4)\\ &= \frac{4\pi G^2}{c^8}\left(E + \sqrt{E^2 - \frac{q^2c^4}{4\pi\varepsilon_0 G}}\right)^2 && (7.5)\\ &= \frac{4\pi G^2}{c^8}\left(E + \sqrt{E^2 - Q^2}\right)^2 . && (7.6) \end{aligned}$$

Dus vinden we

$$S_{BH} = \frac{\pi k_B G}{\hbar c^5} \left(E + \sqrt{E^2 - Q^2} \right)^2 \ . \tag{7.7}$$

$$\tag{7.8}$$

b) Als we $\Delta \equiv \sqrt{E^2 - Q^2}$ definiëren, dan hebben we dat

$$\frac{\partial \Delta}{\partial E} = \frac{E}{\Delta} \ . \tag{7.9}$$

Hiermee kunnen we het volgende uitrekenen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial}{\partial E} \left[\lambda \left(E + \Delta \right)^2 \right] && (7.10) \\
&= 2\lambda (E + \Delta) \left(1 + \frac{E}{\Delta} \right) && (7.11) \\
&= 2\lambda \frac{(E + \Delta)^2}{\Delta} \ . && (7.12)
\end{aligned}$$

Dus

$$T = \frac{\sqrt{E^2 - Q^2}}{2\lambda \left(E + \sqrt{E^2 - Q^2} \right)^2} \ . \tag{7.13}$$

c) We rekenen verder uit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial E} &= \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{\Delta}{2\lambda \left(E + \Delta \right)^2} \right] && (7.14) \\
&= \frac{1}{2\lambda} \frac{\frac{E}{\Delta} \cdot (E + \Delta)^2 - 2\Delta (E + \Delta) \left(1 + \frac{E}{\Delta} \right)}{(E + \Delta)^4} && (7.15) \\
&= \frac{1}{2\lambda} \frac{\frac{E}{\Delta} - 2}{(E + \Delta)^2} && (7.16) \\
&= \frac{1}{2\lambda} \frac{E - 2\Delta}{\Delta (E + \Delta)^2} \ . && (7.17)
\end{aligned}$$

Hiermee hebben we dat

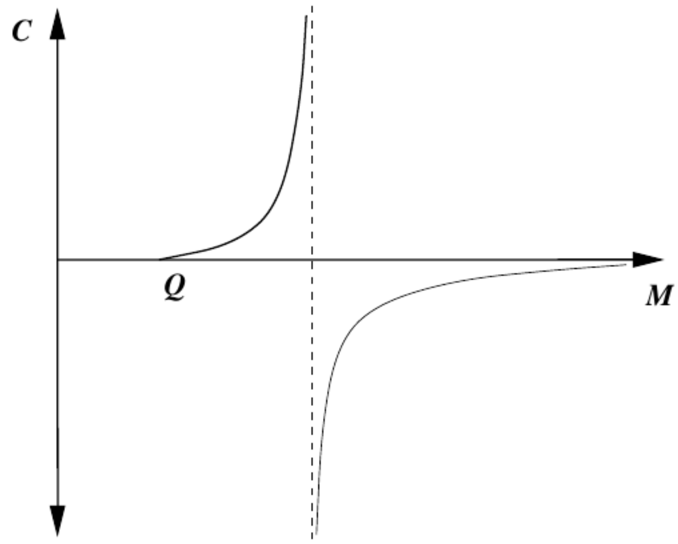
$$\begin{aligned}
C_{BH} = \frac{\partial E}{\partial T} = \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda \Delta (E + \Delta)^2}{E - 2\Delta} && (7.18) \\
&= 2\lambda \frac{\sqrt{E^2 - Q^2} \left(E + \sqrt{E^2 - Q^2} \right)^2}{E - 2\sqrt{E^2 - Q^2}} \ . && (7.19)
\end{aligned}$$

$$\tag{7.20}$$

d) C_{BH} zal divergeren wanneer $E_c - 2\sqrt{E_c^2 - Q^2} = 0$. Dus

$$E_c = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ . \tag{7.21}$$

Men ziet dan dat $C_{BH} < 0$ als $E > E_c$ en $C_{BH} > 0$ als $E < E_c$. Concreet ziet C_{BH} er als volgt uit:



e) Met het resultaat van deel c), en door $Q^2 = 3E_c/4$ te stellen, vinden we dat

$$T_c = \frac{1}{9\lambda E_c} = \frac{\hbar c^3}{9\pi k_B G M_c} \ , \tag{7.22}$$

zo dat

$$T_c \approx 5.47 \cdot 10^{-8}\mathrm{K} \ . \tag{7.23}$$