

Mathematical Introduction to Fluid Dynamics

01/09/2023

Exercises

The exercise exam counts for 10/20 marks. The scores of the two best exercises are averaged to form the final score for this part of the exam.

1. Viscous liquid with a constant and uniform density flows down a full pipe of circular section with radius R at angle α to the horizontal. Set boundary conditions at $r = R$. Set up and solve equations for this flow. Assume that the flow is steady, there is no imposed pressure gradient and the flow is solely subjected to gravity.
2. Consider an oil spill on the surface of the ocean. The oil has a different density than the surrounding water, and the spill starts to spread. Wind and ocean currents interact with the oil spill, generating unique flow patterns and vortices. The fluid is assumed to be inviscid, and the volume forces acting on it are conservative.
 - (a) Starting from Euler's equations, derive an equation of motion appropriate for the oil layer, considering the density (ρ) of oil is constant.
 - (b) With the equation of motion derived in part (a), derive an equation governing the time evolution of vorticity $\vec{\omega}$ in the oil layer.
 - (c) Assume a density gradient ($\nabla\rho \neq 0$) exists between the oil and water. Discuss how this density gradient would influence the oil layer's vorticity and the extra term that would appear under this assumption.
 - (d) Wind causes the oil to start accelerating from rest at $t = 0$. If the velocity $\vec{u}$ is initially zero and $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ becomes non-zero, calculate how the rate of increase of vorticity $\vec{\omega}$ will relate to the density gradient and the acceleration.
 - (e) Sketch a simple diagram indicating where you expect high and low vorticity due to wind influence.
3. In a very deep ocean (bottom at infinity) a thermocline appears at a depth of $H = 100$ m. Across such a thermocline the density changes from $\rho_1 = 995.6502\text{kg/m}^3$ to $\rho_2 = 998.2071\text{kg/m}^3$. In case of a baroclinic mode determine the speed of propagation of long gravity waves ($H \ll \lambda$) on the thermocline and calculate the displacement at the interface if the surface displacement is 2 m.

Oefeningen

Het oefeningenexamen telt mee voor 10/20 punten. Daarvoor wordt de score van de twee beste oefeningen opgeteld om tot de eindscore te komen.

1. Een visceuze vloeistof met een constante en uniforme dichtheid vloeit neerwaarts in een buis met cirkelvormige doorsnede van straal R en een hoek met de horizontaal α . Bepaal de randvoorwaarden op $r = R$. Bepaal de vergelijkingen voor deze stroming en los ze op. Neem aan dat de stroming tijds-onafhankelijk is, dat er geen vastgelegde drukgradiënt is, en dat de stroming enkel door zwaartekracht aangedreven wordt.
2. Beschouw een olievlek op het oppervlak van de oceaan. De olie heeft een andere dichtheid dan het omgevende water, en de olievlek begint uit te spreiden. Wind en oceaanstromingen zullen interageren met de olievlek, en dat genereert unieke stroompatronen en kolken. De vloeistoffen worden als niet-visceus verondersteld, en de lichaamskrachten zijn conservatief.
 - (a) Begin van de Eulervergelijkingen om een bewegingsvergelijking voor de olievlek op te schrijven, waarbij je er van uitgaat dat de dichtheid (ρ) van de olie constant is.
 - (b) Leid een vergelijking af voor de evolutie van de vorticheit $\vec{\omega}$ in de olielaag, m.b.v. de vorige bewegingsvergelijking uit deel (a).
 - (c) Neem aan dat er een dichtheidsgradiënt ($\nabla\rho \neq 0$) is tussen de olie en het water. Bespreek hoe deze dichtheidsgradiënt invloed heeft op de vorticheit in de olielaag en welke extra term gecreëerd wordt door deze aanname.
 - (d) De wind begint de olie te versnellen vanuit rust op $t = 0$. Als de snelheid $\vec{u}$ initieel nul is en $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ niet-nul wordt, bereken dan hoe de vorticheit $\vec{\omega}$ verbonden is met de dichtheidsgradiënt en de versnelling.
 - (e) Maak een eenvoudige schets waarop je de plaats van lage en hoge vorticheit aangeeft, die ontstaat ten gevolge van de wind.
3. In een zeer diepe oceaan (bodem op oneindig) is een spronglaag gelegen op een diepte van $H = 100$ m. Overheen deze spronglaag verandert de dichtheid van $\rho_1 = 995.6502 \text{ kg/m}^3$ naar $\rho_2 = 998.2071 \text{ kg/m}^3$. Bereken de voorplantingssnelheid van de baroclinische golf voor lange golflengtes ($H \ll \lambda$) op deze spronglaag en bereken de verplaatsing op het oppervlak, indien de verplaatsing van de spronglaag 2 m is.