

Samenvatting cpn

Tijl Jappens

August 31, 2016

Abstract

Dit is een snel ineem geflanste samenvatting voor cpn

1 Fouten

1.1 Fouten door de manier hoe de getallen opgeslagen zijn

Er bestaan 2 manieren om af te ronden naar floating point getal:

1. Round to nearest

$$\hat{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

2. Afkappen

$$\hat{x} = \text{sign}(x) \max(|x_1|, |x_2|)$$

1. Afhankelijk van basis en precessie van het floating point getal
2. Som van kleine getallen bij grote geeft een grote fout
3. Verschil van bijna gelijke getallen geeft grote fout

Stelling 1.2 Voor alle rekenkundige bewerkingen \circ geldt $\forall x, y \in \mathbb{F} : \exists \rho \in \mathbb{R} : x \circ y = (x \circ y)(1 + \rho)$

1.2 Conditie

Stel we willen zien hoe bij een bepaalde functie de output verandert bij verandering van de input.

$$y = f(x) \tag{1}$$

$$dy = f'(x)dx \tag{2}$$

$$\frac{\delta y}{y} \approx \frac{xf'(x)}{f(x)} \frac{\delta x}{x} \tag{3}$$

Voor het oplossen van het stelsel $Ax = b$ geeft dit:

$$f = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : b \mapsto A^{-1}b \tag{4}$$

$$\frac{\delta y}{y} \approx \frac{|Ax| |A^{-1}|}{|x|} \frac{\delta x}{x} \leq |A^{-1}| |A| \frac{\delta x}{x} \tag{5}$$

2 Oplossen van stelsels

2.1 Gauss eliminatie of LU-decompositie

$$A = LU \quad (6)$$

$$Ly = b \quad Ux = y \quad (7)$$

Deze bestaat niet altijd, er zijn gevallen dat men 0 als pivot element bekommt, in dat geval moet men rijen omwisselen. Men heeft dan nog een extra matrix nodig, dit is de orthogonale permutatiematrix P:

$$PA = LU \quad (8)$$

Als echter $\rho \equiv \frac{\max_{i,j} |u_{i,j}|}{\max_{i,j} |a_{i,j}|}$ te groot wordt kan er een probleem optreden. Dan moeten we ook een permutatie aanmaken voor zowel rijen als kolommen om te wisselen¹.

$$PAQ = LU \quad (9)$$

2.2 Overgedetermineerde stelsels

De least mean squared oplossing van het stelsel $Ax = b$ wordt gegeven door de exacte oplossing voor c in volgende vergelijking.

$$(A^\dagger A)c = A^\dagger b \quad (10)$$

Stelsels met beperkingen In het vlak kan een rechte voorgesteld worden door:

$$c_0 + c_1x + c_2y = 0 \quad (11)$$

$$c_1^2 + c_2^2 = 0 \quad (12)$$

De afstand van een willekeurig punt tot die rechte geeft dan:

$$r = |c_0 + c_1x_i + c_2y_i| \quad (13)$$

De som van de kwadraten van die afstanden kunnen we schrijven als:

$$\inf(|Ac|) \text{ moet geminimaliseerd worden met } |c| = 1 \quad (14)$$

Als we A nu QR ontbinden dan komt dit overeen met dat we A door R vervangen, omdat we een extra beperking hebben kunnen we zelfs de eerste rij van R laten vallen.

¹Veel processor intensiever

3 Niet lineaire benaderingen

3.1 Veelterm benaderingen

Bepaling optimale graad gebeurt door te kijken naar formule (15). Zolang σ blijft dalen loont het om een hogere graad te gebruiken.

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{m - d - 1} \quad (15)$$

Voordelen en nadelen van veeltermbenaderingen:

1. Elke functie kan benaderd worden door een veelterm (Stelling van Weierstrass, stelling van Taylor ezv.)
2. Ze zijn redelijk goede benaderingen voor integralen mee uit te rekenen
3. Ze zijn redelijk onbetrouwbaar als het op het bepalen van afgeleiden aankomt.

4 Toevalsgeneratoren

4.1 Eigenschappen goede toevalsgenerator

1. Snel en weinig geheugen
2. Dezelfde getallen op elke pc
3. Lange periode P
4. De getallen moeten reproduceerbaar zijn
5. Ze moeten dezelfde statistische eigenschappen vertonen als echte willekeurige getallen.

4.2 Testen van toevalsgeneratoren

De χ^2 -test is een test die vooral efficiënt is bij een groot aantal observaties N .

$$\chi_{n-1}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (16)$$

De Kolmogorov-Smirnov-test is een test gebaseerd op de cumulatieve distributiefunctie.

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i \leq x} \quad (17)$$

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)| \quad (18)$$

De manier hoe D_n verdeeld is is gekend en kan opgezocht worden (net zoals bij χ^2 trouwens).