

MEETKUNDE I

TWEEDE BACHELOR WISKUNDE

Samenvatting theorie Meetkunde I

Auteurs:
Stijn CAMBIE

1 samenvatting bewijzen

(stelling 17)

Zij p, q 2 punten van $\mathbb{A}^n$,

zij $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ een basis van $T_p \mathbb{A}^n$ en $\{w_1, w_2 \dots, w_n\}$ een basis van $T_q \mathbb{A}^n$,

dan bestaat er een unieke transformatie van $\mathbb{A}^n$ zodat

$$F(p) = q \text{ en } F_*(v_i) = w_i$$

Bewijs. Uniciteit: $A(v_i) = w_i \Rightarrow A$ uniek bepaald en zo ook $b = q - Ap$.

$F = t_b \circ A$ voldoet.

□

(stelling 19)

Een affiene transformatie is een dilatatie ofwel een translatie ofwel een homothetie is.

Bewijs. $F(p) = \lambda p + b$

$\lambda = 1$ translatie

$\lambda \neq 1$, stel $p_0 = \frac{b}{1-\lambda}$ en krijg $F(p) = p_0 + (\lambda - 1)(p - p_0)$

□

1.1 deel 2

(stelling 25)

Zij $F : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ een willekeurige afbeelding zodat $d(F(p), F(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{E}^n$.

Dan is F een isometrie.

Bewijs. $b = F(0)$ en $G = t_{-b} \circ F$

$$d(G(p), G(q)) = d(p, q)$$

$$\|G(p)\| = \|p\|$$

$$G(p) \cdot G(q) = p \cdot q \quad (2)$$

G lineair $\Rightarrow G$ matrix en (2) $\Rightarrow G$ orthogonaal

□

(stelling 26)

Zij p, q 2 punten van $\mathbb{E}^n$,

zij $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ en $\{w_1, w_2 \dots, w_n\}$ een orthonormale basis van resp. $T_p \mathbb{E}^n$ en $T_q \mathbb{E}^n$,
dan bestaat er een unieke isometrie F van $\mathbb{E}^n$ zodat

$$F(p) = q \text{ en } F_*(v_i) = w_i$$

Bewijs. Stelling 17 : unieke affine transformatie F

$$A = W \cdot V^{-1} \text{ orthogonaal}$$

□

(stelling 27)

Zij S een affine deelruimte van $\mathbb{E}^n$ en $x \in \mathbb{E}^n$.

Dan bestaat er exact 1 affine deelruimte T door x die orthogonaal complementair is met S .

$$S \cap T = y \text{ met } d(x, y) = \inf\{d(x, z) | z \in S\}$$

Bewijs. $S = p + V$ en $T = x + V^\perp$

$$\forall z \in S: d(x, z)^2 = d(x, y)^2 + d(y, z)^2$$

□

(stelling 28)

Als $V(F) \neq \emptyset$, dan is $V(F)$ een affiene deelruimte in de richting van $\ker\{F_* - I\}$.

Bewijs. $x \in V(F) \Leftrightarrow (A - I)x + b = 0$

□

(stelling 29)

Zij F een isometrie.

Dan bestaat er juist 1 isometrie G en juist 1 translatie t_b zodat:

$F = t_b \circ G$ en dus $F_* = G_*$

$V(G) \neq \emptyset$

$G_*(b) = b$

Bewijs. $\ker(A - I) \perp \text{Im}(A - I)$:

$$x = Ax, y = Az - z : x \cdot y = x \cdot (Az - z) = Ax \cdot Az - x \cdot z = 0$$

dimensiestelling $\Rightarrow \mathbb{R}^n = \ker(A - I) \oplus \text{im}(A - I)$

bestaan:

$p \in \mathbb{E}^n$ willekeurig nemen, stel $p\vec{F}(p) = x + y = Ax + (Az - z)$ en $q = p - z$

$$q\vec{F}(q) = q\vec{p} + p\vec{F}(p) + F(p)\vec{F}(q) = z + x + y + -Az = x$$

$G = t_{-x} \circ F$:

$F = t_x \circ G$

$q \in V(G)$

$G_*(x) = Ax = x$

Uniciteit:

$$F = t_{b_1} \circ (A_1x + c_1) = t_{b_2} \circ (A_2x + c_2) \Rightarrow A_1 = A_2$$

$$b_1 - b_2 \in \ker(A - I) = c_1 - c_2 \in \text{Im}(A - I)$$

□

(stelling 30)

Elke isometrie $F \in Iso(2, \mathbb{R})$ van $\mathbb{E}^2$ is een
translatie, rotatie of schuifspiegeling tov een rechte

Bewijs. $\det A = 1$

ontbinding van stelling 29 $F = t_b \circ G$

$A = I$: translatie

anders $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ met $\ker\{A - I\} = \{0\} \Rightarrow b = 0$.

$\dim\{V(G)\} = 0 \Rightarrow 1$ vast punt x_0

$$F(x) = x_0 + Ax_0\vec{x}$$

$\det A = -1$

$\det(A - I) = \det(A + I) = 0 \Rightarrow$ eigenvector v, w bij eigenwaarden $1, -1$ resp.

$V(G)$ rechte $L = x_0 + \text{vect}\{v\}$

$y_0 = \pi_L(x)$

$$G(x) = y_0 + G_*y_0\vec{x} = 2y_0 - x = R_L(x)$$

□

(stelling 31)

Elke isometrie $F \in Iso(3, \mathbb{R})$ van $\mathbb{E}^3$ is
een translatie, schroefbeweging, schuifspiegeling t.o.v. een vlak of een draaispiegeling.

Bewijs. $\det A = 1$

$A = I \Rightarrow$ translatie

$A \neq I \Rightarrow \dim \ker(A - I) = 1$ en $V(G)$ rechte L door x_0 .

$G(x) = x_0 + A(x_0\vec{x})$

$\det A = -1$

$\det(A + I) = \det A \det(I + A^t) = 0 \Rightarrow -1$ is een eigenwaarde met bijhorende eigenvector v .

Stel $W = \text{vect}\{v\}^\perp$.

Als 1 een eigenwaarde is van A , zal $\dim \ker(A - I) = 2$.

$V(G) = x_0 + \ker(A - I)$

G is een spiegeling in $V(G)$ en b is in de richting van $V(G)$.

Als 1 geen eigenwaarde is van A

Dan $F = G$ en $V(F) = x_0$.

Stel $H = x_0 + W$ en $K = R_H \circ G$, dan is $\det K = 1$ en $K(x_0) = x_0 \Rightarrow K$ is een translatie of rotatie.

$F = R_H \circ K$ is een draaispiegeling.

□

1.2 deel 3

(stelling 32)

Elke reguliere kromme heeft een herparametrisatie met snelheid 1.

Als β_1, β_2 beide booglengtegeparametriseerde krommen zijn van dezelfde kromme, dan is $\beta_1(t) = \beta_2(\pm t + c)$ met c willekeurig.

Bewijs. Als $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ regulier is, is s_α een diffeomorfisme van I naar $S_\alpha(I)$.

Noem de inverse van s_α q en definieer $\beta = \alpha(q)$, dan is $|\beta'| = 1$.

$\beta_1(t) = \beta_2(h(t))$ en $h'(t) = \pm 1$.

□

(stelling 33 en 41)

Zij $\beta : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ een reguliere kromme in $\mathbb{E}^2$ en (T, N) het Frenet-referentiestelsel.

Dan bestaat er een functie $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoet aan de formules van Frenet:

$$T' = \kappa v N$$

$$N' = -\kappa v T$$

Bewijs. Indien β BLP:

$T \cdot T' = 0$, dus T' in de richting van N , zodat $T' = (T' \cdot N)N = \kappa N$.

$N' = (JT')' = J\kappa N = -\kappa T$

Algemeen:

$T'(t) = (\overline{T}(s(t)))' = v(t) \overline{\kappa(t)N(t)} = v\kappa N$.

$N'(t) = (\overline{N}(s(t)))' = \overline{N'}(s(t)) \cdot s'(t) = -\kappa(t)T(t) \cdot v(t)$.

□

(stelling 34)

Als β BLP is met kromming 0, dan is β een rechte.

Bewijs.

$$\beta''(s) = T'(s) = \kappa N(s) = 0 \Rightarrow \beta(s) = p + sv$$

□

(stelling 35)

Als de kromming κ van een BLP-kromme constant is, is β een deel van een cirkel met straal $R = \frac{1}{|\kappa|}$.

Bewijs. Stel $m = \gamma(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa}N(s)$ als vast punt [$\gamma'(s) = 0$]

Dan is $|\beta - m| = \frac{1}{|\kappa|}$.

□

(stelling 36)

Zij β een BLP kromme waarvoor $\kappa(s_0) > 0$.

Dan bestaat er juist 1 BLP cirkel c zodat $c(s_0) = \beta(s_0)$, $c'(s_0) = \beta'(s_0)$ en $c''(s_0) = \beta''(s_0)$.

Bewijs. De osculatiecirkel $c(s)$ voldoet.

Een cirkel die voldoet is steeds van de vorm

$$c(s) = m + r \left(\cos \frac{(s - s_0)}{r} e_1 + \sin \frac{(s - s_0)}{r} e_2 \right)$$

Uit $c'(s_0) = e_2$ vinden we dat $e_2 = T(s_0)$.

Via $c''(s_0)$ hebben we dat $\kappa(s_0) = \frac{1}{r}$ en vervolgens $e_1 = -N(s_0)$.

Tot slot geeft $m + r e_1 = c(s_0)$ dat $m = \beta(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} N(s_0)$ is.

De cirkel is dus uniek en gelijk aan de osculatiecirkel. $\square$

(Lemma van Kneser)

Als $\alpha|_{[a,b]}$ een spiraalboog is, dan geldt dat $\overline{B_b} \subseteq B_a$.

Bewijs. Neem de evoluit $\gamma(s)$.

Er geldt dat $v_\gamma(s) = -\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'$.

Bijgevolg is $L(\gamma|_{[a,b]}) = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}$.

Uit $\frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)} \geq \|\gamma(a) - \gamma(b)\|$ volgt de ongelijkheid.

Daar γ', γ'' niet lineair afhankelijk zijn, geldt de ongelijkheid strikt. $\square$

(stelling 39)

Zij F een isometrie van $\mathbb{E}^2$ en zij $\epsilon = \det F_* = \pm 1$.

Als α en $\beta = F(\alpha)$ 2 congruente BLP-krommen zijn, dan is $F_* T_\alpha = T_\beta$, $F_* N_\alpha = \epsilon N_\beta$ en $\kappa_\alpha = \epsilon \kappa_\beta$.

Bewijs. $F_* T_\alpha = (F(\alpha))' = T_\beta$.

$(F_* T_\alpha, \epsilon F_* N_\alpha)$ en (T_β, N_β) zijn beide positieve orthonormale basissen $\Rightarrow \epsilon F_* N_\alpha = N_\beta$.

$$\kappa_\alpha = T'_\alpha \cdot N_\alpha = (F_* T_\alpha)' \cdot F_* N_\alpha = \epsilon \kappa_\beta$$

$\square$

(stelling 40)

Zij $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^2$ 2 krommen met snelheid 1.

Als $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$ bestaat er een oriëntatiebewarende isometrie F zodat $\beta = F(\alpha)$.

Als $\kappa_\alpha = -\kappa_\beta$ bestaat er een oriëntatieomkerende isometrie F zodat $\beta = F(\alpha)$.

Bewijs. Geval $\kappa_\alpha = \kappa_\beta$

Zij $s_0 \in I$ willekeurig en F de unieke isometrie (stelling 17) zodat $F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$, $F_*(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0)$ en $F_*(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0)$.

Definieer $\gamma = F(\alpha)$ en $f : I \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto f(s) = T_\beta(s)T_\gamma(s)$.

$$f' = T'_\beta(s)T_\gamma(s) + T_\beta(s)T'_\gamma(s) = \kappa_\beta N_\beta(s)T_\gamma(s) + T_\beta(s)\kappa_\gamma N_\gamma(s) = \kappa_\beta (JT_\beta(s) \cdot T_\gamma(s) + T_\beta(s) \cdot JT_\gamma(s)) = 0$$

Dus is $f(s) = f(s_0) = 1$ een constante functie en wegens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt dat $\beta' = \gamma'$ waaruit $\beta = \gamma$ volgt daar $\beta(s_0) = \gamma(s_0)$.

□

1.3 H 13

(stelling 46 en 48)

Zij α een reguliere kromme in $\mathbb{E}^3$ met snelheid $v > 0$. Dan geldt :

$$T' = v\kappa N$$

$$N' = -v\kappa T + v\tau B$$

$$B' = -v\tau N$$

Bewijs. Voor BLP-krommes:

Omdat $B' \cdot B = 0$ en $B' \cdot T = 0 = B' \cdot T + B \cdot \kappa N$, is $B' = (B' \cdot N)N$.

De 1^e en 3^e formule zijn per defenitie waar.

$$N' \cdot T = -N \cdot T' = -\kappa$$

$$N' \cdot N = 0$$

$$N' \cdot B = -N \cdot (-\tau N) = \tau$$

Algemeen komt er een factor v bij ten gevolge van $s'(t)$.

$$\text{vb. } B'(t) = (\overline{B}(s(t)))' = \overline{B}'(s(t))s'(t) = B'v$$

□

(stelling 47)

Zij β een kromme met $\|\beta'\| = 1$ en $\kappa > 0$.

Dan is β gelegen in een vlak als en slechts als $\tau = 0$.

Bewijs. tau = 0

$B' = 0 \Rightarrow B(s) = u$ met u constant.

Zij $f : I \rightarrow \mathbb{R} : f(s) = (\beta(s) - \beta(s_0)) \cdot u$.

Dan is $f'(s) = T(s) \cdot B(s) = 0$

f Constant $\Rightarrow (\beta(s) - \beta(s_0)) \cdot u = 0$, dus β ligt in het vlak door $\beta(s_0)$ loodrecht op u .

beta een vlak

Er bestaat een $u \in T_p\mathbb{E}^3$ zodat $(\beta(s) - p) \cdot u = 0$ voor elke s

Afleidende geeft dat $T \cdot u = 0$ en $\kappa N \cdot u = 0 \Rightarrow B(s) = \frac{\pm u}{\|\pm u\|}$.

B constant $\Rightarrow B' = 0 = -\tau N$.

□

(stelling 49)

Zij F een isometrie van $\mathbb{E}^3$ en zij $\epsilon = \det F_* = \pm 1$.

Als α en $\beta = F(\alpha)$ twee congruente BLP krommen met $\kappa_\alpha > 0$, dan is

$$F_*T_\alpha = T_\beta$$

$$F_*N_\alpha = N_\beta$$

$$F_*B_\alpha = \epsilon B_\beta$$

$$\kappa_\alpha = \kappa_\beta$$

$$\tau_\alpha = \epsilon \tau_\beta$$

Bewijs.

$$F_*T_\alpha = (F(\alpha))' = T_\beta$$

$$\kappa_\beta N_\beta = T'_\beta = F_*(T_\alpha)' = \kappa_\alpha F_*N_\alpha \Rightarrow \kappa_\alpha = \kappa_\beta, F_*N_\alpha = N_\beta$$

$(F_*T_\alpha, F_*N_\alpha, \epsilon F_*B_\alpha)$ en $(T_\beta, N_\beta, B_\beta)$ zijn beide positieve orthonormale basissen $\Rightarrow F_*B_\alpha = \epsilon B_\beta$.

$$\tau_\beta = -B'_\beta \cdot N_\beta = -\epsilon F_*B'_\alpha \cdot F_*N_\alpha = -\epsilon B'_\alpha \cdot N_\alpha = \epsilon \tau_\alpha$$

□

(stelling 50 (congruentiestelling voor ruimtekrommen))

Zij $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ 2 ruimtekrommen met snelheid 1.

Als $\kappa_\alpha = \kappa_\beta > 0$ en $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta$ dan zijn α, β congruent.

Bewijs. Geval $\tau_\alpha = \tau_\beta$

Fix $s_0 \in I$ willekeurig.

Neem F de unieke oriëntatiebewarende isometrie zodat

$$F(\alpha(s_0)) = \beta(s_0)$$

$$F(T_\alpha(s_0)) = T_\beta(s_0)$$

$$F(N_\alpha(s_0)) = N_\beta(s_0)$$

$$F(B_\alpha(s_0)) = B_\beta(s_0)$$

Def. $\gamma = F(\alpha)$ en $f : I \rightarrow \mathbb{R} : s \mapsto f(s) = T_\beta(s) \cdot T_\gamma(s) + N_\beta(s) \cdot N_\gamma(s) + B_\beta(s) \cdot B_\gamma(s)$

Dan is

$$f' = T'_\beta(s) \cdot T_\gamma(s) + N'_\beta(s) \cdot N_\gamma(s) + B'_\beta(s) \cdot B_\gamma(s)$$

$$+ T_\beta(s) \cdot T'_\gamma(s) + N_\beta(s) \cdot N'_\gamma(s) + B_\beta(s) \cdot B'_\gamma(s) = 0$$

$\Rightarrow f(s) = 3 \forall s$ en dus $T_\beta(s) = T_\gamma(s)$ en omdat $\gamma(s_0) = \beta(s_0)$ geldt $\gamma(s) = \beta(s) \forall s$.

□

(stelling 51)

Een reguliere kromme β met $\kappa > 0$ is een cilinderschroeflijn als $\frac{\tau}{\kappa} = C^{te}$.

Bewijs. $\Rightarrow$

$T(s) \cdot u = C^t$ zodat $\kappa N \cdot u = 0$ en $u = \cos(\theta)T + \sin(\theta)B$.

$N' \cdot u = 0 = -\kappa \cos\theta + \tau \sin\theta$ zodat $\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta$ constant is.

$\Leftarrow$

Neem $\theta = \cot^{-1}(\frac{\tau}{\kappa})$ en stel $U(s) = \cos\theta T(s) + \sin\theta B(s)$.

$U'(s) = \cos\theta \kappa N - \sin\theta \tau N = 0$ zodat $U(s) \cdot T(s) = \cos\theta$ met $U(s)$ een constante vector.

□

(stelling 52)

Als α een reguliere kromme is met $\kappa > 0$ en τ allebei constant, dan is α congruent met een cirkelschroeflijn.

Bewijs. Stelling 51: α cilinderschroeflijn.

Stel $\beta(s) = \gamma(s) + s \cos(\theta)u$.

$$\gamma' \times \gamma'' = \kappa T \times N - \cos\theta \kappa u \times N = \kappa \sin^2\theta B + \kappa \cos\theta \sin\theta T$$

$$\kappa_\gamma = \frac{||\gamma' \times \gamma''||}{||\gamma'||^3} = \frac{\kappa}{\sin^2\theta} = C^{te} \Rightarrow \gamma = \bigcirc$$

□

2 samenvatting defenities

(def Spiegelning)

Zij S een affiene deelruimte en voor $x \in \mathbb{E}^n$ nemen we T_x gelijk aan de unieke deelruimte door x die orthogonaal complementair is met S .

Da afbeelding $\pi_S : \mathbb{E}^n \rightarrow S : x \mapsto \pi_S(x) = S \cap T_x$ is de orthogonale projectie op S .

De spiegeling in S definiëren we als $R_S : \mathbb{E}^n \rightarrow S : x \mapsto R_S(x) = x + 2x\pi_S(x)$

(def schroefbeweging in $\mathbb{E}^3$)

De samenstelling van een rotatie $Rot \neq I$ rond een as L in de richting van de as.

(def 16)

We noemen een kromme regulier als $v(t) > 0$ voor alle t .

(def oscullatiecirkel)

$m = \beta(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}$ wordt het krommingsmiddelpunt genoemd.

De oscullatiecirkel is nu de cirkel met middelpunt m en straal $\frac{1}{|\kappa|}$.

(def 21)

Voor een BLP-kromme β noemen we $\gamma(s) = \beta(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ de evoluut of centrale kromme.

(def Intrinsieke vergelijking van β)

$$\beta(s) = \left(\int_{s_0}^s \cos\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right)du, \int_{s_0}^s \sin\left(\int_{s_0}^u \kappa(t)dt\right)du \right)$$

Dit is de enige kromme met kromming $\kappa(s)$ op oriëntatiebewarende isometrieën na.

(def Cilinderschroeflijn)

Een reguliere kromme waarvoor $T(t) \cdot u = \cos(\theta)$ met u, θ gefixeerd.