

Samenvatting BRI 2023-2024

1 Verzamelingen

- **Doorsnede:** De verzameling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten.
 $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- **Unie:** De verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B en geen andere.
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- **Verschil:** De verzameling van alle elementen van A die niet in B voorkomen.
 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- **Symmetrisch verschil:** De verzameling van alle elementen die in de ene zitten, maar niet in de andere.
 $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- **Complement:** De verzameling van alle individuen die geen element zijn van A .
 $A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}$
- **Machtsverzameling:** De verzameling van alle deelverzamelingen van A .
 $A = \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

doorsnede	unie
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap B \subseteq A$	$A \subseteq A \cup B$
als $A \subseteq B$, dan $A \cap B = A$	als $A \subseteq B$, dan $A \cup B = B$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
verschil	complement
$A \setminus A = \emptyset$	$U = \emptyset^c$
$A \setminus \emptyset = A$	$A \cup A^c = U$
$A \setminus B \subseteq A$	$A \cap A^c = \emptyset$
als $A \subseteq B$, dan $A \setminus B = \emptyset$	$A \setminus B = A \cap B^c$
$A \Delta B = B \Delta A$	$(A^c)^c = A$
gemengd	
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2 Precieze uitspraken formuleren

- Conjunctie: $P \wedge Q$ (P en Q)
- Disjunctie: $P \vee Q$ (P of Q)
- Exclusieve of: $P \oplus Q$ of P xor Q (Slechts P of slechts Q)
- Ontkenning: $\neg P$ (Niet P)
- Implicatie: $P \Rightarrow Q$ (Als P , dan Q)
- **Modus ponens:** Als P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is Q waar. $[(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q]$
- **Modus tollens:** Als Q onwaar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is P onwaar. $[(\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P]$
- Equivalentie: $P \Leftrightarrow Q$ (P als en slechts als Q)

De operatoren, gerangschikt van hoge naar lage prioriteit, zijn:

$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Merk op dat we de pijlen onderling geen prioriteit geven. Wel zeggen we: $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ betekent: P impliceert Q , en Q impliceert R . Met andere woorden: $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ betekent $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$.

Tautologie: $P \vee \neg P$ (Altijd waar)

Contradictie: $P \wedge \neg P$ (Altijd onwaar)

$\forall x \in S : P$	voor alle x in S geldt P
$\exists x \in S : P$	er bestaat een x in S waarvoor P geldt
$\exists! x \in S : P$	er bestaat precies één x in S waarvoor P geldt
$\nexists x \in S : P$	er bestaat geen x in S waarvoor P geldt

Tautologieën ($\equiv$ waar)	Contradicties ($\equiv$ onwaar)
$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
$P \Rightarrow P$	
$P \Leftrightarrow P$	
$P \wedge Q \Rightarrow P$	
$P \Rightarrow P \vee Q$	
Logische equivalenties	
$P \wedge P \equiv P$	
$P \vee P \equiv P$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	
$\neg(\neg P) \equiv P$	
$P \wedge \text{waar} \equiv P$	
$P \vee \text{waar} \equiv \text{waar}$	
$P \wedge \text{onwaar} \equiv \text{onwaar}$	
$P \vee \text{onwaar} \equiv P$	
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	commutativiteit van $\wedge$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	commutativiteit van $\vee$
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	associativiteit van $\wedge$
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	associativiteit van $\vee$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$
$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$	De Morgan
$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	De Morgan

3 Opbouw van theorieën

- Definitie: Introduceert een nieuwe term, of een nieuw symbool, en maakt duidelijk wat de term betekent of waarvoor het symbool staat.
- Eigenschap: Een bewering die binnen een bepaalde theorie steeds waar is.
- Axioma: Basiseigenschap, eigenschap die niet bewijsbaar is uit de definities en ook niet uit eerdere eigenschappen.
- Stelling: Een belangrijke bewering waarvan vervolgens bewezen wordt dat ze waar is.
 - Vermoeden: Een stelling die waarschijnlijk waar is, die we niet kunnen bewijzen.
 - Lemma: Een hulpstelling.
 - Gevolg of corollarium: Een stelling wiens bewijs triviaal is.

4 Bewijstechnieken

- **Probleem:** Een precieze omschrijving van een algemene taak.
- **Instantie v/e probleem:** De combinatie van een probleem met een specifieke invoer.
- **Tijdscomplexiteit (met voorbeeld sorteeralgoritme):**
 - Voor een bepaalde instantie van een algoritme: #basisoperaties (Hoeveel operaties quicksort nodig heeft om specifiek $\{2, 1, 3\}$ te sorteren).
 - Voor een bepaalde probleemgrootte van een algoritme: max #basisoperaties nodig voor eender welke instantie met die grootte (Hoeveel operaties quicksort maximaal nodig heeft voor een lijst met x elementen te sorteren. $\{1,2,3\}$ zal minder lang duren dan $\{3,2,1\}$).
 - Voor een bepaalde probleemgrootte: min #basisoperaties voor eender welk algoritme (Hoeveel operaties het beste sorteeralgoritme minimaal nodig heeft om een lijst met x elementen te sorteren).

Bewijstechnieken:

- Vaststelling: waarheidstabel opstellen
- Constructie: voorbeeld geven
- Tekening: Venn-diagram in de meest algemene vorm, of andere dergelijke tekening
- Substitutie: universeel gekwantificeerde variabele vervangen door een uitdrukking of uitdrukking vervangen door een equivalente uitdrukking
- Ketens van (on)gelijkheden, implicaties, equivalenties
- Wederzijdse implicatie/ inclusie
- Herhaalde gevolgtrekking
- Gevalsonderscheid
- Bewijs uit het ongerijmde (Modus tollens)
- Inductie

verzamelingenleer	
$A = B$	via $A \subseteq B$ en $B \subseteq A$
$A \subseteq B$	redeneer over een willekeurige $x \in A$: toon dat $x \in B$ toon dat $A \setminus B = \emptyset$
$A = \emptyset$	uit het ongerijmde, redeneer over een willekeurige $x \in A$
$\text{expr}_1 = \text{expr}_2$	via rekenregels en substitutie door vaststelling (Venn-diagram)
logica	
$P \Leftrightarrow Q$	via $P \Rightarrow Q$ en $P \Leftarrow Q$
$P \Rightarrow Q$	herhaalde gevolgtrekking (zie sectie 4.6) gevalsonderscheid: toon aan dat $P \Rightarrow P_1 \vee P_2$, bewijs vervolgens $P_1 \Rightarrow Q$ en $P_2 \Rightarrow Q$ afzonderlijk
$\forall x \in A : P(x)$	redeneer over een willekeurig element x van A , toon $P(x)$ aan uit het ongerijmde, redeneer over een willekeurige $x \in A$ waarvoor $\neg P(x)$ per inductie
$\exists x \in A : P(x)$	toon een x waarvoor $P(x)$ geldt (constructie / tekening)
P	neem een eigenschap Q die al bewezen is, bewijs $Q \Rightarrow P$
$P \equiv Q$	door vaststelling (waarheidstabel) door herhaalde substitutie
herschrijvingen	
	rekenregels
	bekende eigenschappen
	via definitie omzetten naar een beter begrepen niveau

Definitie 4.2. Een invariant is een bewering die we met een bepaald punt in een algoritme associëren, en waarvan we kunnen aantonen dat die altijd waar is wanneer tijdens de uitvoering van het algoritme dat punt bereikt wordt.

5 Relaties

Definitie 5.1. Gegeven n objecten $x_1, x_2, \dots, x_n$, is “het tupel met als componenten $x_1, x_2, \dots, x_n$ ” een nieuw object, dat genoteerd wordt als $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Een tupel met twee componenten wordt gewoonlijk een koppel genoemd.

Definitie 5.2. Twee tupels $(x_1, \dots, x_n)$ en $(y_1, \dots, y_m)$ zijn gelijk als en slechts als $m = n$ en $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}: x_i = y_i$.

Definitie 5.3. Het Cartesisch product van twee verzamelingen A en B , genoteerd $A \times B$, is $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$.

Het Cartesisch product wordt ook wel gewoon de productverzameling genoemd. $A \times B$ bevat alle koppels waarvan de eerste component een element van A is en de tweede component een element van B .

Definitie 5.4. Het Cartesisch product van n verzamelingen $A_i, i = 1, \dots, n$, genoteerd $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ of $\prod_{i=1}^n A_i$, is

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}.$$

Definitie 5.5. Zij A een verzameling. $A^1 = A$, en $\forall n > 1: A^n = A^{n-1} \times A$.

Definitie 5.6. Een relatie tussen A en B is een deelverzameling van $A \times B$.

Definitie 5.7. Een relatie over $A_1, A_2, \dots, A_n$ is een deelverzameling van $\prod_{i=1}^n A_i$.

Definitie 5.8. Zij R een binaire relatie. De inverse relatie van R , genoteerd R^{-1} , is gedefinieerd als volgt: $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$.

Op een grafische voorstelling vinden we de inverse relatie door de pijlen gewoon om te keren.

Definitie 5.9. Zij $R \subseteq A \times B$ en $S \subseteq C \times D$. De samengestelde relatie, of samenstelling, van R en S , genoteerd $S \circ R$, is

$$S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in B : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}.$$

$S \circ R$ wordt meestal uitgesproken als “ S na R ”.

Definitie 5.10. Als R een binaire relatie over een verzameling A is, wordt R^n voor $n \geq 0$ als volgt gedefinieerd:

- $R^0 = \{(x, x) \mid x \in A\}$.
- $\forall n > 0: R^n = R \circ R^{n-1}$.

6 Functies

Definitie 6.1. Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een functie van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ hoogstens één $(x, y) \in R$ bestaat. y wordt het beeld van x onder de functie genoemd. A wordt de bronverzameling genoemd, en B de doelverzameling van de functie.

$$\forall x \in A: (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$$

Definitie 6.2. Het domein van een functie $f: A \rightarrow B$ is $\{x \mid \exists y: (x, y) \in f\}$.

Het bereik van een functie $f: A \rightarrow B$ is $\{y \mid \exists x: (x, y) \in f\}$.

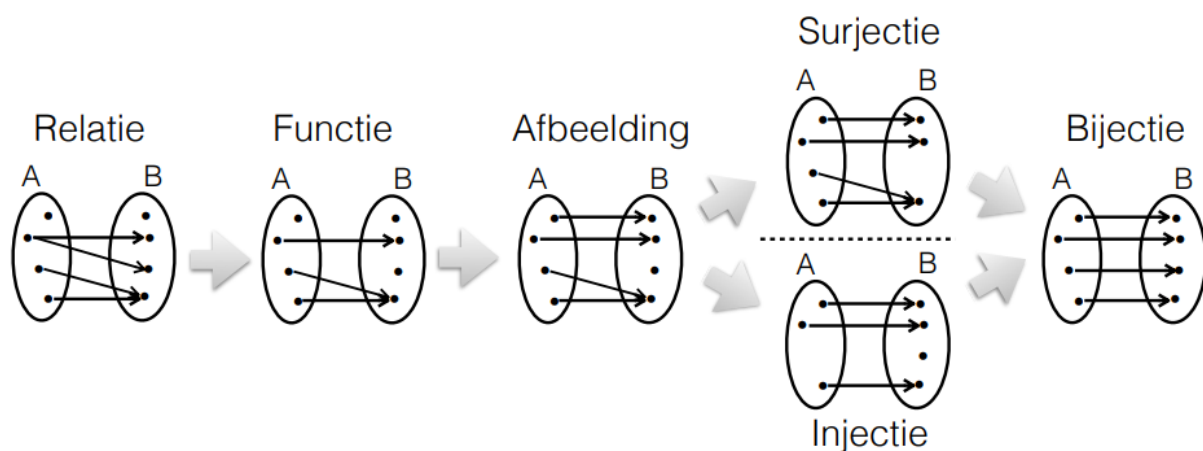
Het domein van een functie f is dus de verzameling van alle x waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is; dit is een deelverzameling van de bronverzameling. Het bereik is de verzameling van alle elementen van B die het beeld zijn van een element in A ; het is een deelverzameling van de doelverzameling.

Definitie 6.3. Een functie $f: A \rightarrow B$ is een afbeelding van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in f$ bestaat.

Definitie 6.4. Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een surjectie als en slechts als elke $y \in B$ het beeld is van een $x \in A$.

Definitie 6.5. Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een injectie als en slechts als elke $x \in A$ op een verschillende $y \in B$ afgebeeld wordt. Met andere woorden: $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.

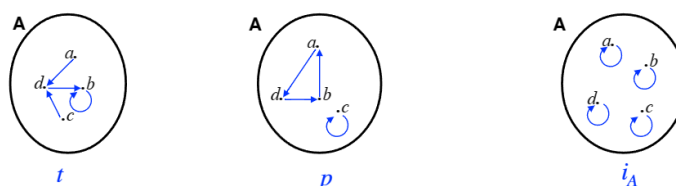
Definitie 6.6. Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een bijectie van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in R$ bestaat, en voor elke $y \in B$ precies één $(x, y) \in R$.



Definitie 6.7. Een functie $f: A \rightarrow A$ is een transformatie als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f .

Definitie 6.8. Een functie $f: A \rightarrow A$ is een permutatie als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f , en ook precies 1 keer het beeld is van een x onder f .

Definitie 6.12. De identiteitsfunctie over een verzameling A , genoteerd i_A , is $i_A: A \rightarrow A: x \mapsto x$.



Definitie 6.9. Een relatie $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times B$ is een functie met n argumenten als en slechts als voor elk tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ hoogstens één $y \in B$ bestaat, zodat $(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in R$.

De termen beeld, bronverzameling, doelverzameling, domein, bereik, afbeelding, enzovoort worden overgenomen.

Definitie 6.10. De samenstelling van een functie $f: A \rightarrow B$ en $g: B \rightarrow C$ is de functie $h: A \rightarrow C: x \mapsto g(f(x))$. De samenstelling van f en g wordt ook genoteerd als $g \circ f$ (spreek uit: “g na f”).

Wanneer een functie f n keer samengesteld wordt met zichzelf, gebruiken we de notatie f^n om de resultaatfunctie aan te duiden. Met andere woorden: $f^2 = f \circ f$; $f^3 = f \circ f \circ f$; $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n keer).

Definitie 6.11. Zij $f: A \rightarrow B$ een functie waarvoor geldt dat $\forall x, x' \in A: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$. De inverse functie van f is de functie $f^{-1}: B \rightarrow A$, waarvoor geldt dat $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Merk op dat de inverse functie niet gedefinieerd is voor functies die niet injectief zijn.

Definitie 6.13. Zij $f: A \rightarrow B$ een functie, en S een deelverzameling van A . Het beeld van S onder f , genoteerd $f(S)$, is gedefinieerd als volgt: $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$.

7 Equivalentierelaties en orderrelaties

Definitie 7.1. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is reflexief als en slechts als $\forall x \in A: (x, x) \in R$.

Definitie 7.2. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is anti-reflexief als en slechts als $\forall x \in A: (x, x) \notin R$.

Definitie 7.3. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is symmetrisch als en slechts als $\forall x, y \in A: (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$.

Definitie 7.4. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is anti-symmetrisch als en slechts als $\forall x, y \in A: (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$.

Definitie 7.5. Een relatie $R \subseteq A \times A$ is transitief als en slechts als $\forall x, y, z \in A: (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Definitie 7.6. Een equivalentierelatie is een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is.

Het symbool $\sim$ wordt vaak gebruikt om een willekeurige equivalentierelatie aan te duiden.

Definitie 7.7. Zij A een verzameling waarvoor een equivalentierelatie $\sim$ gedefinieerd is, en zij $x \in A$. De equivalentieklasse van x , genoteerd $K(x)$, is de verzameling van alle elementen van A die equivalent zijn met x . M.a.w.:

$$K(x) = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

Definitie 7.8. $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ is een partitie van A als en slechts als

(a) $\forall x \in A: \exists! P_i \in P: x \in P_i$.

(b) $\forall P_i \in P: P_i \neq \emptyset$.

Definitie 7.9. Zij A een verzameling met een equivalentierelatie $\sim$. De partitie van A die bestaat uit alle equivalentieklassen van A onder $\sim$, wordt de quotiëntverzameling van A onder $\sim$ genoemd, genoteerd $A/\sim$.

Definitie 7.10. Een orderrelatie is een relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

Wanneer we over een willekeurige orderrelatie spreken, zullen we daar gewoonlijk het symbool $\leq$ voor gebruiken. We spreken $x \leq y$ uit als “ x komt voor, of is gelijk aan, y ”, of soms gewoon als “ x is kleiner dan of gelijk aan y ”.

Definitie 7.11. Een totale orde is een orderrelatie waarvoor geldt dat $\forall x, y: x \leq y \vee y \leq x$.

Een orderrelatie die niet totaal is, wordt ook wel een partiële orde genoemd.

Definitie 7.12. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. We noemen $a \in A$ een bovengrens voor X als en slechts als $\forall x \in X: x \leq a$, en een ondergrens voor X als en slechts als $\forall x \in X: a \leq x$.

Definitie 7.13. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. Als er een bovengrens b van X bestaat zodat $b \leq b'$ voor alle bovengrenzen b' van X , dan zeggen we dat b het supremum van X is.

Definitie 7.14. Zij X een deelverzameling van een geordende verzameling $A, \leq$. Als er een ondergrens o van X bestaat zodat $o' \leq o$ voor alle ondergrenzen o' van X , dan zeggen we dat o het infimum van X is.

Het infimum is net als het supremum uniek, als het bestaat.

Ter illustratie: stel $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ en $X = \{3, 4, 5\}$

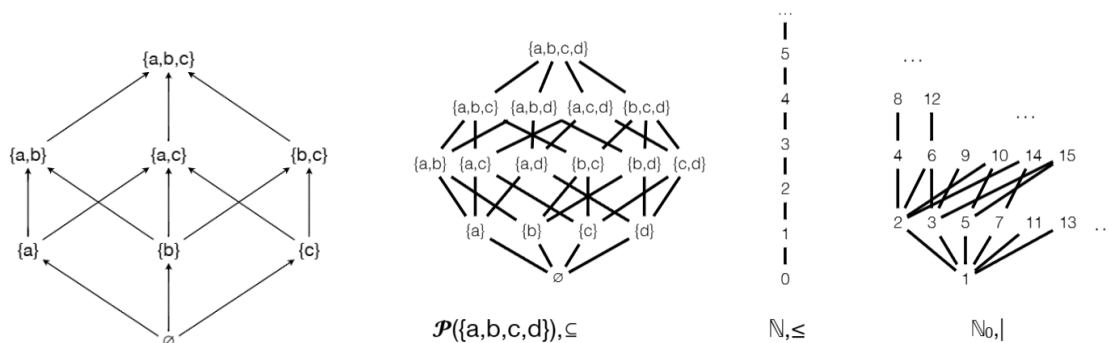
Dan is zijn de ondergrenzen 1 en 2 en de bovengrenzen 6 en 7. Het infimum, de grootste ondergrens, is dan 2, en het supremum, de kleinste bovengrens, is dan 6.

Stelling 7.3. A) Zij $A = P(U)$ voor een bepaalde verzameling U . In de geordende verzameling $A, \subseteq$ geldt voor elke deelverzameling X van A : $\sup(X) = \bigcup_{V \in X} V$.

B) Zij $A = P(U)$ voor een bepaalde verzameling U . In de geordende verzameling $A, \subseteq$ geldt voor elke deelverzameling X van A : $\inf(X) = \bigcap_{V \in X} V$.

Definitie 7.15. Een complete tralie is een geordende verzameling $A, \leq$ met de eigenschap dat elke eindige verzameling $X \subseteq A$ een supremum en infimum in A heeft.

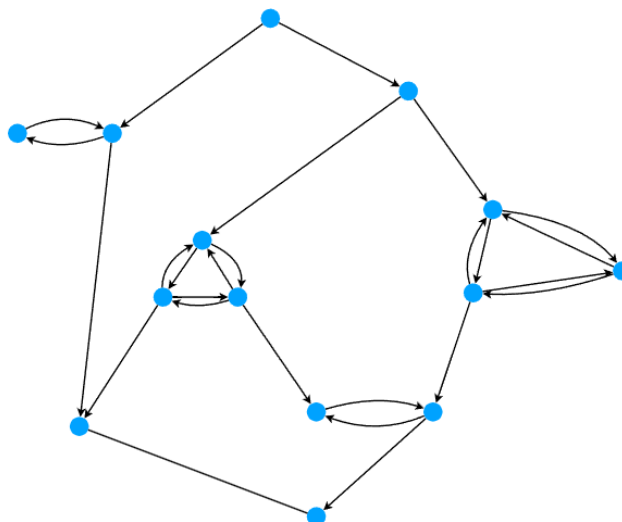
Stelling 7.4. Voor eender welke verzameling U geldt: $P(U), \subseteq$ is een complete tralie.



Definitie 7.16. Een quasi-orde is een relatie die reflexief en transitief is.

Een quasi-orde die symmetrisch is, is een equivalentierelatie.

Een quasi-orde die antisymmetrisch is, is een orderrelatie.



8 Kardinaliteit

Definitie 8.1. De kardinaliteit van een verzameling is het aantal elementen dat de verzameling bevat. De kardinaliteit van S wordt genoteerd als $|S|$ of $\#S$.

De kardinaliteit van de verzameling der natuurlijke getallen wordt met een speciaal symbool aangeduid: $\aleph_0$ (spreek uit: “alef-nul”).

Axioma 8.1. Zij A en B twee verzamelingen. $|A| \leq |B|$ als en slechts als er een injectie van A naar B bestaat. $|A| = |B|$ als en slechts als er een bijectie tussen A en B bestaat.

Stelling 8.2. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Voor meer dan 3 verzamelingen is de algemene regel: tel de kardinaliteiten van doorsnedes van 1, 3, 5 verzamelingen bij elkaar op, en trek de kardinaliteiten van doorsnedes van 2, 4, 6, ...

verzamelingen hiervan af, en dit voor alle combinaties van verzamelingen die mogelijk zijn. Deze regel wordt het inclusie-exclusie-principe genoemd.

Formeel opgeschreven ziet dat principe er als volgt uit:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I| \text{ oneven}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}, |I| \text{ even}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Stelling 8.4. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. (M.a.w.: de kardinaliteit van de productverzameling is het product van de kardinaliteiten.)

Stelling 8.5. $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|$.

Gevolg 8.1. $|A^k| = |A|^k$.

Stelling 8.6. $|P(A)| = 2^{|A|}$.

De verzameling van alle mogelijke afbeeldingen van A naar B wordt soms als B^A genoteerd. De rationale achter die notatie heeft opnieuw te maken met de kardinaliteit van die verzameling.

Stelling 8.7. $|B^A| = |B|^{|A|}$.

Illustratie: Stel de verzameling A is een groep mensen met $A = \{\text{Arnaud, Bas, Charlie}\}$, en B de verzameling ijsmaken met $B = \{\text{Aardbei, Chocolade, Vanille, Mokka}\}$. Als groep A naar een ijsalon gaat, heeft eerst Arnaud keuze uit 4 smaken. Dan Bas, en dan Charlie. Er zijn dus $4 \cdot 4 \cdot 4$ aantal combinaties voor wie welke smaak pakt, ofwel 4^3 . Dat stemt overeen met $|B|^{|A|}$.

Stelling 8.8. Zij A en B twee verzamelingen met kardinaliteit m en n , en $m \leq n$. Het aantal injecties van A naar B gelijk aan $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$, of, korter geschreven: $n!/(n-m)!$.

Illustratie: Neem hetzelfde voorbeeld als voorheen, maar als nu iemand een smaak kiest is de smaak op. Dan heeft Arnaud 4 keuzes, Bas 3 en Charlie 2. Zo krijg je in totaal $4 \cdot 3 \cdot 2$ mogelijke combinaties. Dit kan geschreven worden als $4!/1!$, omdat $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, en $1! = 1$, en de noemer de laatste $(n-m)$ cijfers van de vermenigvuldiging wegschrijft.

Stelling 8.9. Zij A en B twee verzamelingen met kardinaliteit n . Dan is het aantal bijecties tussen A en B gelijk aan $n!$.

Definitie 8.3. Een combinatie van m elementen uit een verzameling A is een deelverzameling van A met m elementen.

Stelling 8.10. Zij A een verzameling met kardinaliteit n . Dan is het aantal combinaties van m elementen uit A gelijk aan $(n!)/(m!(n-m)!)$.

Definitie 8.4. De binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{m}$ wordt gedefinieerd als

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$

Stelling 8.11. Zij A een algoritme dat rijen sorteert door meermaals twee elementen ervan te vergelijken en afhankelijk van die vergelijking elementen van die rij van plaats te verwisselen. Voor elk getal n bestaat er altijd een rij van lengte n waarvoor A minstens $\log_2(n!)$ vergelijkingen nodig heeft.

Stelling 8.12. $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Stelling 8.13. De kardinaliteit van $\mathbb{Q}$ is $\aleph_0$.

Stelling 8.14. Er bestaat geen bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{N}$

Een verzameling waarvan de kardinaliteit $\aleph_0$ is, wordt aftelbaar oneindig genoemd.

- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt: $n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ geldt: $\aleph_0^n = \aleph_0$.
- Voor elke $n \in \mathbb{N}$ met $n > 1$ geldt: $\aleph_0^n > \aleph_0$.
- Het aantal deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
- Het aantal functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$.