

1

Stelsels & matrices

Stelsels van lineaire vergelijkingen

We bestuderen stelsels van **lineaire vergelijkingen**: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$
 met a_i de coëfficiënten (zijn gegeven)
 en b het rechterlid / de constante term
 vb.: • elektrische stromen
 • meetkunde:

Welke (x, y) voldoen aan $ax + by = c$?

→ Welke voldoen ook aan $a'x + b'y = c'$?

Stelsel: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

→ **unieke oplossing**

strijdig: geen oplossing

onbepaald: ∞ veel oplossingen (parameter)

Algemeen

↳ m vergelijkingen met n onbekenden

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

omzetten naar matrices:

coëfficiëntenmatrix: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

variabelen: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

rechterlid: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ → **homogeen stelsel** als het rechterlid volledig uit nullen bestaat

$$AX = B$$

Oplossen van stelsels

↳ stelsel eenvoudiger maken met:

elementaire rijoperaties (ERO):

↳ tijdens omvormen moeten oplosbaarheid en oplossingsverzameling ongewijzigd blijven
 ↳ stappen moeten "teruggedraaid" kunnen worden

$$R_i: a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

① $R_i \rightarrow \lambda R_i$ ($\lambda \neq 0$) (vermenigvuldigen met scalar)

② $R_i \leftrightarrow R_j$ (twee rijen van plaats wisselen)

③ $R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$ (optellen met veelvoud andere rij)

↳ toepassen op **uitgebreide matrix** = $(A|B)$

def. twee matrices (stelsels) worden **rij-equivalent** genoemd indien de ene uit de andere kan ontstaan door elementaire rijoperaties uit te voeren

↳ ze hebben dezelfde oplossingsverzameling

Stelsel omzetten naar "opgelost" stelsel
↳ echelonmatrix/rijgereduceerde matrix

def. het **leidende element** van een rij van een matrix is het eerste element van die rij dat niet nul is

def. een **echelonmatrix** heeft de volgende eigenschappen:

- in elke rij is het leidende element 1;
 - alle elementen links van en onder een leidend element zijn 0;
 - eventuele nulrijen staan onderaan.
- ↳ als de leidende elementen niet gelijk zijn aan 1, staat de matrix in **trapvorm**

def. een echelonmatrix is **rijgereduceerd** indien de elementen boven elk leidend element ook gelijk zijn aan 0

↳ elke matrix is rij-equivalent met een echelonmatrix en een rijgereduceerde matrix

Oplosbaarheid?

- geen oplossingen: nulrij met rechterlid $\neq 0$
- 1 oplossing: achterwaartse substitutie
- ∞ veel oplossingen: sprong in trap, meer onbekenden dan vergelijkingen

§ methode om echelonmatrix/rijgereduceerde matrix te verkrijgen door ERO: **Gauss-eliminatie**

§ bij stelsels met parameters → gevalsonderscheid

Rekenen met matrices

def. $\mathbb{R}^{m \times n}$ is de verzameling matrices met:

- elementen in $\mathbb{R}$
- m rijen en n kolommen

↳ andere notatie: $M^{m \times n}(\mathbb{R})$

↳ als $m=n$: **vierkante matrix**

eig: A en B zijn **gelijk** als voor alle i en j geldt dat $a_{ij} = b_{ij}$

Notatie:

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, \quad (A)_{ij} = a_{ij}$$

$(A)_{ii} \rightarrow$ vormen de **hoofddiagonaal**

matrix met 1 rij: **rijmatrix**

matrix met 1 kolom: **kolommatrix**

def. Door een $(m \times n)$ -matrix A te spiegelen rond de hoofddiagonaal, ontstaat er een $(n \times m)$ -matrix, de **getransponeerde matrix** (A^T) van A.

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Eigenschappen:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $A^T = A$: **symmetrische matrix**
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $A^T = -A$: **scheefsymmetrische matrix**
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $\forall i, j: i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ is een **diagonaal-matrix** (enkel elementen op hoofddiagonaal $\neq 0$)

Elementaire rijoperaties/matrices

def. Een **elementaire matrix** $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wordt verkregen door op I_n juist 1 ERO uit te voeren

↳ $E_n \cdot A$ is hetzelfde als ERO op A

↳ elke E_n is inverteerbaar en het invers is eveneens elementair (en van hetzelfde type)

↳ alle inverteerbare matrices kunnen geschreven worden als product van elementaire matrices

St: Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn de volgende beweringen equivalent:

1. de matrix A heeft een links inverse B ;

2. het stelsel $A \cdot X = 0$ heeft enkel de oplossing $X = 0$;

3. A is rij-equivalent met I_n ;

4. A is een product van E_n ;

5. A is inverteerbaar met $A^{-1} = B$;

6. A heeft een rechts inverse B .

↳ bewijzen door $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6$ en 1

$1 \Rightarrow 2$: stel $AX = 0$, dan is

$$B \cdot (AX) = B \cdot 0 = 0$$

$$B \cdot (A \cdot X) = (B \cdot A) \cdot X = I_n \cdot X = X = 0$$

$2 \Rightarrow 3$: $A \cdot X = 0$ enkel gebonden variabelen

A is rij-equivalent met I_n

$3 \Rightarrow 4$: $A \xrightarrow{\text{ERO}_1} A_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{ERO}_k} A_k = I_n$

een ERO is hetzelfde als links vermenigvuldigen met een elementaire matrix

$$A \xrightarrow{\text{ERO}_1} E_1 \cdot A_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{ERO}_k} E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A = I_n$$

A is de rechter inverse van $E_k \cdot \dots \cdot E_1$

$E_k \cdot \dots \cdot E_1$ is inverteerbaar met invers $E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$

dus A is inverteerbaar en $A^{-1} = E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$

$4 \Rightarrow 5$ & $5 \Rightarrow 6$ evident

$1 \Rightarrow 5$: Als $B \cdot A = I_n$ } dan zijn A en B inverteerbaar
 $A \cdot B = I_n$

Berekenen van inverse $(A | I_n) \rightarrow$ ERO uitvoeren

om tot rijgereduceerde vorm van A te komen.

① er ontstaat een nulrij in $A \rightarrow$ niet inverteerbaar

② er ontstaat een I_n uit A

$$(A | I_n) \rightarrow (E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot A | E_k \cdot \dots \cdot E_1 \cdot I_n) = (I_n | A^{-1})$$

Extra: LU-decompositie

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ is een **bovendriehoeksmatrix** als voor

alle a_{ij} met $i > j$, $a_{ij} = 0$ (U)

A is een **benedendriehoeksmatrix** als voor

alle a_{ij} met $i < j$, $a_{ij} = 0$ (L)

$$A = L \cdot U$$

$$A \cdot X = B$$

$$L \cdot Y = B$$

$$U \cdot X = Y$$

} "opgeloste" stelsels

2

Determinanten

Determinanten

vb: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ stel $a \neq 0$: $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \right)$
 $\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{cb}{a} & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & 0 \end{array} \right)$

het stelsel heeft een unieke oplossing als en slechts als $ad-bc \neq 0$

def. $f: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad-bc$

def. $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \mapsto f(A)$ een afbeelding

met eigenschappen:

D-1 $f(I_n) = 1$

D-2 $f(A)$ verandert van teken als in A 2 rijen van plaats worden verwisseld

D-3 f is lineair in de eerste rij

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : f\left(\begin{pmatrix} \lambda R_1 + \mu R_1' \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot f\left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \right) + \mu f\left(\begin{pmatrix} R_1' \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \right)$$

is een **determinant-afbeelding**

↳ voldoet eveneens aan volgende eigenschappen

D-4 f is lineair in rij i voor elke $i \in \{1, \dots, n\}$

↳ combinatie D-2 en D-3

D-5 als A een nulrij heeft of als 2 rijen gelijk zijn (ERO), dan is $f(A) = 0$

↳ D-2 (2 rijen wisselen)

stl. Als $f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto f(A)$ een determinantafbeelding, dan:

1. een ERO van type 3 ($R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j$, $i \neq j$) verandert $f(A)$ niet

2. als E een elementaire matrix, dan

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{als } E \text{ correspondeert met } R_i \rightarrow R_i + \lambda R_j, \\ -1 & \text{als } E \text{ correspondeert met } R_i \leftrightarrow R_j \text{ (} i \neq j \text{)} \\ \lambda & \text{als } E \text{ correspondeert met } R_i \rightarrow \lambda R_i \end{cases}$$

3. als E een elementaire matrix, dan

$$f(E \cdot A) = f(E) \cdot f(A)$$

stl. 1. als A een driehoeksmatrix, dan

$$f(A) = \prod_{i=1}^n (A)_{ii}$$

↳ driehoeksmatrix $\rightarrow$ diagonaal matrix: $(A)_{ii}$ gelijk

2. A is inverteerbaar als en slechts als $f(A) \neq 0$

$$3. \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n} : f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$$

$$4. f(A^T) = f(A)$$

↳ naar driehoeksmatrix $\rightarrow (A)_{ii}$ blijven gelijk

↳ zie p. 59-60 $\rightarrow$ bewijzen

gev. 1. als de determinantafbeelding bestaat, determineert deze of de matrix al dan niet inverteerbaar is ($\neq 0$)

$$2. \text{ als } A \text{ inverteerbaar is, dan } f(A^{-1}) = \frac{1}{f(A)}$$

3. aangezien $f(A^T) = f(A)$ gelden D-(2-5) ook voor kolommen

Permutaties

def. Een **permutatie** van een verzameling V is een bijectie van V naar zichzelf

als $V = \{1, 2, \dots, n\}$, dan is $\sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ de bijectie, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$

S_n is de verzameling van permutaties van $\{1, \dots, n\}$
Het aantal permutaties van S_n is $n!$

def. Een **transpositie** is een permutatie waarbij 2 elementen worden verwisseld en alle anderen op zichzelf worden afgebeeld. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

st. Elke permutatie in S_n is een samenstelling van transposities

def. Zij $\sigma \in S_n$ en i en j verschillende elementen uit $\{1, 2, \dots, n\}$, dan is het koppel (i, j) een **inversie** van σ als $i < j$ en $\sigma(i) > \sigma(j)$

vb: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $(1, 2)$ is een inversie van σ
 $(1, 3)$ en $(2, 3)$ zijn dit niet

def. Zij $\sigma \in S_n$ een samenstelling van m transposities, dan is $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^m$ { inversies

$\hookrightarrow \sigma$ is even als $\text{sgn}(\sigma) = +1$

σ is oneven als $\text{sgn}(\sigma) = -1$

$\hookrightarrow (-1)^m$ geeft een vaste waarde
 m heeft geen vaste waarde

st. Zij σ (permutatie) en τ (transpositie) $\in S_n$, dan geldt $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = -\text{sgn}(\sigma)$

Er is juist één determinantaafbeelding ($\forall n \geq 1$)

$\hookrightarrow f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$

Neem $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$
dan kunnen we de i -de rij van een $(n \times n)$ -matrix schrijven als:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot e_k$$

Indien de determinantaafbeelding bestaat kunnen we deze schrijven als:

$$f(A) = f\left(\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{ie} \cdot e_e \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} \cdot e_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot f\left(\begin{pmatrix} e_j \\ \vdots \\ \sum_{e=1}^n a_{ie} \cdot e_e \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk} \cdot e_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot \dots \cdot a_{ie} \cdot \dots \cdot a_{nk} \cdot f\left(\begin{pmatrix} e_j \\ \vdots \\ e_e \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\right)$$

$\rightarrow$ als $e_j, \dots, e_e, \dots, e_n$ allemaal verschillen, dan is

$$f\left(\begin{pmatrix} e_j \\ \vdots \\ e_e \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}\right) = \text{sgn}(\sigma) \cdot f(I_n) = \text{sgn}(\sigma)$$

anders gezegd: $\begin{pmatrix} e_j \\ \vdots \\ e_e \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(i)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$

Als dat ingevuld wordt, krijgen we:

$$p(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} = \det(A)$$

De unieke determinantafbeelding wordt gedefinieerd door:

$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} : A \mapsto \det(A)$ (zie bovenstaande formule)
 $\hookrightarrow$ **determinant** van A : $\det A$, $\det(A)$, $|A|$

Voorbeeld met $n=3 \rightarrow 3!=6$ permutaties

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} : +1 \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : -1 \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} : -1$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} : -1 \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} : +1 \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : +1$$

$$\det A = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$\rightarrow$ regel van **Sarrus** $\rightarrow$ diagonalen

Ontwikkelen naar een rij of kolom

$\rightarrow$ kies een "makkelijke" rij of kolom (veel 0'en)

$\hookrightarrow$ bijvoorbeeld 1^e rij:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot C_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot \det(M_{1j})$$

Hierin is C_{ij} de **cofactor** met:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}) \text{ met } M_{ij} \text{ de minor}$$

def. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ is

- de ij -de **cofactor** C_{ij} van A het geheel van termen in de determinantformule waar a_{ij} in optreedt, na afzonderen van a_{ij} ;
- de ij -de **minor** van A de $(n-1) \times (n-1)$ -matrix M_{ij} , verkregen door uit A de i -de rij en j -de kolom te schrappen

Determinant van Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \\ i > j}} (x_i - x_j)$$

Determinant van Wronski

Als $f_1, \dots, f_n$ reële, voldoende afleidbare functies:

$$W(f_1, \dots, f_n)(x) = \det \begin{pmatrix} f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ Df_1(x) & \dots & Df_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^{n-1}f_1(x) & \dots & D^{n-1}f_n(x) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Wronskiaan / det van Wronski}$$

De adjunctmatrix

def. voor $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vormen we de matrix

$\text{adj}(A) = (C_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}^T$ = de getransponeerde van de cofactorenmatrix = de **adjunctmatrix** of toegevoegde matrix van A

$$(\text{adj}(A))_{ij} = C_{ji} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ji})$$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (\text{adj}(A))_{ji} = \det(A)$$

$$(A \cdot \text{adj}(A))_{ii} = \det(A)$$

$$(A \cdot \text{adj}(A))_{ij} = 0 \text{ als } i \neq j$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det A \cdot I_n \quad \text{Als } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

gew. als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverteerbaar ($\det(A) \neq 0$), dan is

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

De formule van Cramer

een stelsel $A \cdot X = B$ met $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ noemen we een **Stelsel van Cramer**

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot B$$

als $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, dan geldt:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \cdot (C_{1i} \ C_{2i} \ \dots \ C_{ni}) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \sum_{k=1}^n b_k \cdot C_{ki}$$

$$x_i = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

↳ **formule van Cramer**

3

Vectorruimten

Het begrip vectorruimte

def. Een **commutatieve groep** is een verzameling V met een bewerking (som) $+$: $V \times V \rightarrow V$ zó dat voldaan is aan de eigenschappen:

- **associativiteit** $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$
- **neutraal element** $0 \in V : 0 + v = v = v + 0 \quad \forall v \in V$
- **tegengesteld element** $v + v' = v' + v = 0 \quad \forall v \in V : \exists v' \in V$
- **commutativiteit** $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

→ schrijf $(V, +)$ is een commutatieve groep

def. Een **reële vectorruimte** $(\mathbb{R}, V, +)$ bestaat uit een commutatieve groep $(V, +)$ met een uitwendige bewerking: **scalair vermenigvuldiging**

$$\mathbb{R} \times V \rightarrow V : (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

met volgende eigenschappen:

- **distributiviteit - 1** $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
- **distributiviteit - 2** $(\lambda_1 + \lambda_2)v = \lambda_1 v + \lambda_2 v$
- **gemengde associativiteit** $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$
- **coëfficiënt 1** $1 \cdot v = v$

$\lambda \rightarrow$ coëfficiënten / scalaren

$v \rightarrow$ vectoren

0 (neutraal element optelling) $\rightarrow$ nulvector

triviale vectorruimte $\rightarrow \{0\}$

lem. In een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt $\forall v, w, x \in V$:

$$v + x = w + x \Rightarrow v = w$$

lem. In $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- $0 \cdot v = 0 = \lambda \cdot 0$
- $(-1) \cdot v = -v = 1(-v)$
- $(-\lambda) \cdot v = -(\lambda \cdot v) = \lambda(-v)$

Deelruimten en lineaire combinaties

def. Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en $U \subset V$ zodat $(\mathbb{R}, U, +)$ met dezelfde optelling en scalair vermenigvuldiging als V , ook een vectorruimte is, dan is $(\mathbb{R}, U, +)$ of U een (lineaire) **deelruimte** van $(\mathbb{R}, V, +)$

Deelruimtecriterium

U is een deelruimte van V ($(\mathbb{R}, V, +)$) a.s.a.

- $U \neq \emptyset$
- $\forall x, y \in U : x + y \in U$
- $\forall x \in U : \forall r \in \mathbb{R} : rx \in U$

Lineaire combinatie

→ een eindige som van het type $r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$ met $r_i \in \mathbb{R}$ en $v_i \in V$, $\sum_{i=1}^n r_i v_i$

triviale deelruimten $\rightarrow \{0\}$ en V

U bevat automatisch alle lineaire combinaties van haar vectoren

eig. Als $v_1, \dots, v_n \in V$, dan is $W = \{r_1 v_1 + \dots + r_n v_n \mid r_i \in \mathbb{R}\}$ een deelruimte van V

→ W wordt **voortgebracht** door $v_1, \dots, v_n$

→ **dimensie** van W is hoogstens n

→ zie notities les voor bewijs

prop De doorsnede van een aantal deelruimten van een vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ is opnieuw een deelruimte van V

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte en D een niet-lege deelverzameling van V .

De deelruimte opgespannen door D is $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot x_i \mid n \in \mathbb{N}_0, x_1, \dots, x_n \in D \text{ en } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$.

We noteren $\text{vct}(D)$, $\text{span}(D)$ of $\langle D \rangle$.

Als $D = \emptyset$, dan is $\text{vct}(D) = \{0\}$

↳ kleinste deelruimte van V die D omvat

$$\text{vct}(D) = \bigcap_{\substack{U_i = \text{deelruimte van } V \\ \text{die } D \text{ omvat}}} U_i$$

Som en directe som van deelruimten

→ de unie van deelruimten is niet per se een deelruimte

def. $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte met deelruimten U en W . Dan is $\{u+w \mid u \in U, w \in W\}$ een deelruimte van V .

↳ **Somruimte** van U en W , noteer $U+W$.

→ Algemeen: $U_1, \dots, U_k$ deelruimten van V
 $\sum_{j=1}^k U_j = U_1 + U_2 + \dots + U_k = \{\sum_{j=1}^k u_i \mid u_i \in U_i \forall i = 1, \dots, k\} = \text{som(ruimte)}$

def. We noemen $U+W$ een **directe som** als elke vector in $U+W$ op precies één manier geschreven kan worden als $u+w$ met $u \in U, w \in W$

→ notatie $\bigoplus_{j=1}^k U_j = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_k$

prop. $U, W \subset V$ deelruimten, dan is $U+W$ een directe som a.s.a. $U \cap W = \{0\}$

Bewijs: $\Rightarrow$ Neem $u \in U \cap W$

TB: $u = 0$

Dan is $\begin{matrix} u & + & 0 & = & u & = & 0 & + & u \\ \in U & & \in W & & \in U & & \in W \end{matrix}$

Omdat de som direct is geldt $u=0$ en $0=u$.
(beide schrijfwijzen moeten gelijk zijn)

$\Leftarrow$ Stel $\begin{matrix} u_1 & + & w_1 & = & u_2 & + & w_2 \\ \in U & & \in W & & \in U & & \in W \end{matrix}$

TB: $u_1 = u_2$ en $w_1 = w_2$

Dan is $\underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$

Dus $u_1 - u_2 = 0$ en $w_2 - w_1 = 0$

↳ $u_1 = u_2$ en $w_1 = w_2$

prop. Gegeven $(\mathbb{R}, V, +)$, U_1, U_2 deelruimten van V . Dan geldt $W = U_1 \oplus U_2$ a.s.a.

• $W = U_1 + U_2$

• $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

↳ kan ook veralgemeend worden naar $U_1, \dots, U_k$

Lineaire onafhankelijkheid, basis & dimensie

Lineaire (on)afhankelijkheid

def. Gegeven $(\mathbb{R}, V, +)$ met D een deelverzameling van V .
 D is **lineair afhankelijk** als een vector in D geschreven kan worden als lineaire combinatie van de anderen.

D is **vrij** als D niet lineair afhankelijk is.

prop. D is vrij a.s.a. de enige lineaire combinatie die de nulvector geeft de combinatie is waarin alle coëfficiënten 0 zijn.

zie bew p. 105
 $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \forall i$
→ schrijf v_i als kolomvectoren $A = (v_1 : v_2 : \dots : v_n) \in \mathbb{R}^{n \times k}$
↳ los $A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$ op

Basis, dimensie en coördinaten

def. D een deelverzameling van $(\mathbb{R}, V, +)$ is **voortbrengend** als $\text{Vect}(D) = V$.

→ als D eindig is, is V **eindig voortgebracht**
↳ elke $v \in V$ kan geschreven worden als
 $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot d_i$ met $d_i \in D$

def. B een deelverzameling van $(\mathbb{R}, V, +)$ is een **basis** van V als B voortbrengend en vrij is.
↳ elke $v \in V$ kan op unieke wijze geschreven worden

Lemma van Steinitz

Lemma. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een vectorruimte. Dan geldt:
1) voortbrengend deel met m elementen → deel met meer dan m elementen lineair afhankelijk
2) vrij deel met n elementen → deel met minder dan n elementen niet voortbrengend

Bewijs 1: Neem $\{x_1, \dots, x_m\}$ voortbrengend
Neem $n > m$ en $\{y_1, \dots, y_n\} \subset V$

TB: $\{y_1, \dots, y_m\}$ zijn niet vrij

VTB: Er bestaan $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, niet alle 0 met
 $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0$

Omdat $\{x_1, \dots, x_m\}$ voortbrengend:

$$\begin{matrix} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{m1} \cdot x_m \\ \vdots \\ y_i = \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} \cdot x_j \\ \vdots \\ y_n = a_{1n} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_m \end{matrix}$$

We zoeken λ_i niet allemaal 0 zodat $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i = 0$
maar $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot x_j = \sum_{j=1}^m (\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot \lambda_i) \cdot x_j$

Het is dus voldoende om λ_i niet alle 0 te vinden met $\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot \lambda_i = 0$ voor alle j

↳ homogeen stelsel met n onbekenden λ_i en m vergelijkingen

Omdat $n > m$, heeft dit stelsel een niet-nul-oplossing

1) $y_1 \neq x_1$, VTB = voldoende te bewijzen

2) via contrapositie: minder dan n elementen wel voortbrengend → uit 1) n niet vrij

gev. Als er in $(\mathbb{R}, V, +)$ een voortbrengend deel is voor V met m elementen en een vrij deel met n elementen, dan is $n \leq m$.

gev. Als $(\mathbb{R}, V, +)$ een basis heeft met n vectoren, dan heeft elke andere basis van V ook n vectoren.

def. Als V een eindige basis heeft met n elementen, dan is n de **dimensie** van V .
 $\dim_{\mathbb{R}} V = n$

→ geen eindige basis: V is oneindigdimensionaal
 $\dim \{0\} = 0$ → triviale vectorruimte

st. $(\mathbb{R}, V, +)$ met dimensie n . Dan geldt:

1) elke vrije verzameling van V kan **uitgebreid** worden tot een basis van V ;

2) elke eindig voortbrengende verzameling van V kan **gereduceerd** worden tot een basis van V .

Zie cursus voor bewijs

st. $(\mathbb{R}, V, +)$ met dimensie n en $v_1, \dots, v_n \in V$. Dan geldt:
 $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van $V \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ een vrij deel van $V \Leftrightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ een voortbrengend deel van V .

st. $(\mathbb{R}, V, +)$ met $B \subset V$, dan zijn volgende equivalent

1) B is een basis van V

2) B is **maximaal vrij** (elke $D \subset V$ die B omvat niet vrij)

3) B is **minimaal voortbrengend** (elke $D \subsetneq B$ niet voortbrengend voor V)

1 → 2 elke vector in V is een lineaire combinatie van vectoren in B

st. $(\mathbb{R}, V, +)$ eindigdimensionaal en U deelruimte van V . Dan geldt:

bew p. 115 1) U is eindigdimensionaal en $\dim U \leq \dim V$

2) $\dim U = \dim V \Leftrightarrow U = V$

1) neem vrije vectoren in U tot ze voortbrengend zijn.
vrij in U is ook vrij in V .

Coördinaatafbeelding

st. Stel $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van $V \rightarrow$ elke $v \in V$ is op unieke wijze een lineaire combinatie
 $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$ met $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. We noemen $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de **coördinaat** van v t.o.v. B . Noteer $\text{cor}_B(v)$.

$\text{cor}_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n : v \mapsto \text{cor}_B(v)$

→ **coördinaatafbeelding** bepaald door B

$\text{cor}_B(v+w) = \text{cor}_B(v) + \text{cor}_B(w)$

$\text{cor}_B(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \text{cor}_B(v)$

→ coördinaatafbeelding is bijectief

Nogmaals som en directe som

Dimensiestelling

Als V eindigdimensionaal en U en W deelruimten:

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$$

Bewijs: Neem een basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ van $U \cap W$

Dan is $\{v_1, \dots, v_k\}$ vrij in U

Breid uit tot een basis $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_a\}$ van U

analoog: breid $\{v_1, \dots, v_k\}$ uit tot een basis

$\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_b\}$ van W

Kandidaat basis van $U+W$ is

$$\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_a, w_1, \dots, w_b\} = B$$

Van zodra dat bewezen is:

$$\dim(U \cap W) = k, \dim(U) = k+a, \dim(W) = k+b,$$

$$\dim(U+W) = k+a+b$$

$$\text{Dan is } \dim(U+W) + \dim(U \cap W) = k+a+b+k$$

$$\dim(U) + \dim(W) = k+a+k+b =$$

TB: B is vrij en B is voortbrengend.

• B is voortbrengend

TB: elke $v \in U+W$ is een lineaire combinatie van vectoren in B

schrijf $v = u + w$ met $u \in U$ en $w \in W$

schrijf $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_a u_a$

schrijf $w = \alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b$

$$\text{dus } u+w = (\alpha_1 + \alpha'_1)v_1 + \dots + (\alpha_k + \alpha'_k)v_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_a u_a + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b$$

• B is vrij

$$\text{stel } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_a u_a + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b = 0$$

TB: alle $\alpha_i, \gamma_i, \beta_i$ zijn 0

(*) We hebben: $\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_a u_a}_{\in U} = - \underbrace{\beta_1 w_1 - \dots - \beta_b w_b}_{\in W}$

$$\text{Dus } -\beta_1 w_1 - \dots - \beta_b w_b \in U \cap W$$

$$\text{schrijf } -\beta_1 w_1 - \dots - \beta_b w_b = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k$$

$$\text{Dus } \delta_1 v_1 + \dots + \delta_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_b w_b = 0$$

Dus alle δ_i en β_i zijn 0

$$\text{Wegens (*) } \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_a u_a = 0$$

Dus alle α_i, γ_i zijn 0

st. Als $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$, dan is $U_{i=1}^n B_i$ een basis van V en geldt dat $\dim V = \sum_{i=1}^n \dim U_i$

def. In $(R, V, +)$ is W een **complementaire deelruimte** van U als $V = U \oplus W$

st. Als $(R, V, +)$ eindigdimensionaal is, dan heeft elke deelruimte van V een complementaire deelruimte.

Vectorruimten geassocieerd aan een matrix

def. Neem $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan is:

- $R(A) = \text{vct} \{r_1, \dots, r_m\}$ de rijruimte van A , $r_i \in \mathbb{R}^n$;
 - $C(A) = \text{vct} \{c_1, \dots, c_n\}$ de kolomruimte van A , $c_j \in \mathbb{R}^m$;
 - $N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X = 0\}$ de nulruimte van A . = kern
- ↳ dimensies: rijrang, kolomrang en nulliteit
- $\leq n \qquad \qquad \leq m \qquad \qquad \leq n$

als $X = (x_1, \dots, x_n)^T$: $A \cdot X = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_n c_n$

↳ $A \cdot X$ is een lineaire combinatie van de kolommen van A . $A \cdot X = B$ is oplosbaar a.s.a. $B \in C(A)$

St. Neem U de rijgereduceerde vorm van $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan:

zie notities
voor bewijs

• $N(A) = N(U)$

• $R(A) = R(U)$

en

$$\dim_{\mathbb{R}} N(A) + \dim_{\mathbb{R}} R(A) = n$$

aantal vrije
variabelen

aantal niet-
nulrijen in U

↳ aantal kolommen van A

Basis van nulruimte, rijruimte en kolomruimte

Nulruimte:

- oplossingsverzameling i.f.v. vrije variabelen

↳ om de beurt 1 en de rest 0

=> basis, $\dim_{\mathbb{R}} N(A) = \#$ vrije variabelen in U

Rijruimte:

- basis = niet-nulrijen in U

- $\dim_{\mathbb{R}} R(A) = \#$ niet-nulrijen in U

Kolomruimte:

- basis = kolommen met gebonden (niet-vrije) var.

- $\dim_{\mathbb{R}} C(A) = \#$ kolommen met gebonden variabelen

Voortbrengend deel tot basis

• Willekeurige basis → vectoren in rijen

→ basis rijruimte bepalen

• Uitdunnen → vectoren in kolommen

→ basis kolomruimte bepalen

→ overeenkomstige vectoren: basis

of

→ vectoren bij vrije variabelen schrappen

4 Lineaire afbeeldingen

Definitie

def. Stel $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten. $L: V \rightarrow W$ is een **Lineaire afbeelding** als:

$$\bullet L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$\bullet L(\lambda v) = \lambda \cdot L(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

↳ Als $L: V \rightarrow V$ Lineair: **Lineaire transformatie**

↳ Als $L: V \rightarrow \mathbb{R}$: **Lineaire vorm**

$$\bullet L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$$

gev. Zij $L: V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding:

$$\textcircled{1} L(0) = 0 \text{ en } L(-v) = -L(v) \quad \forall v \in V;$$

$$\textcircled{2} L(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot L(v_i) \quad \forall v_i \in V, \lambda_i \in \mathbb{R};$$

$\textcircled{3}$ een L.A. ligt volledig vast door de beelden van de basis.

↳ elke vector l.c. van vect in basis $\rightarrow \textcircled{2}$

$$\text{vb: } \sigma_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n: v \mapsto \sigma_B(v) = (a_1, \dots, a_n) \quad (v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$$

$$\sigma_B(v+w) = \sigma_B(v) + \sigma_B(w) \quad \sigma_B(\lambda v) = \lambda \sigma_B(v)$$

Lineaire afbeeldingen en matrices

Matrixvoorstelling van een lineaire afbeelding

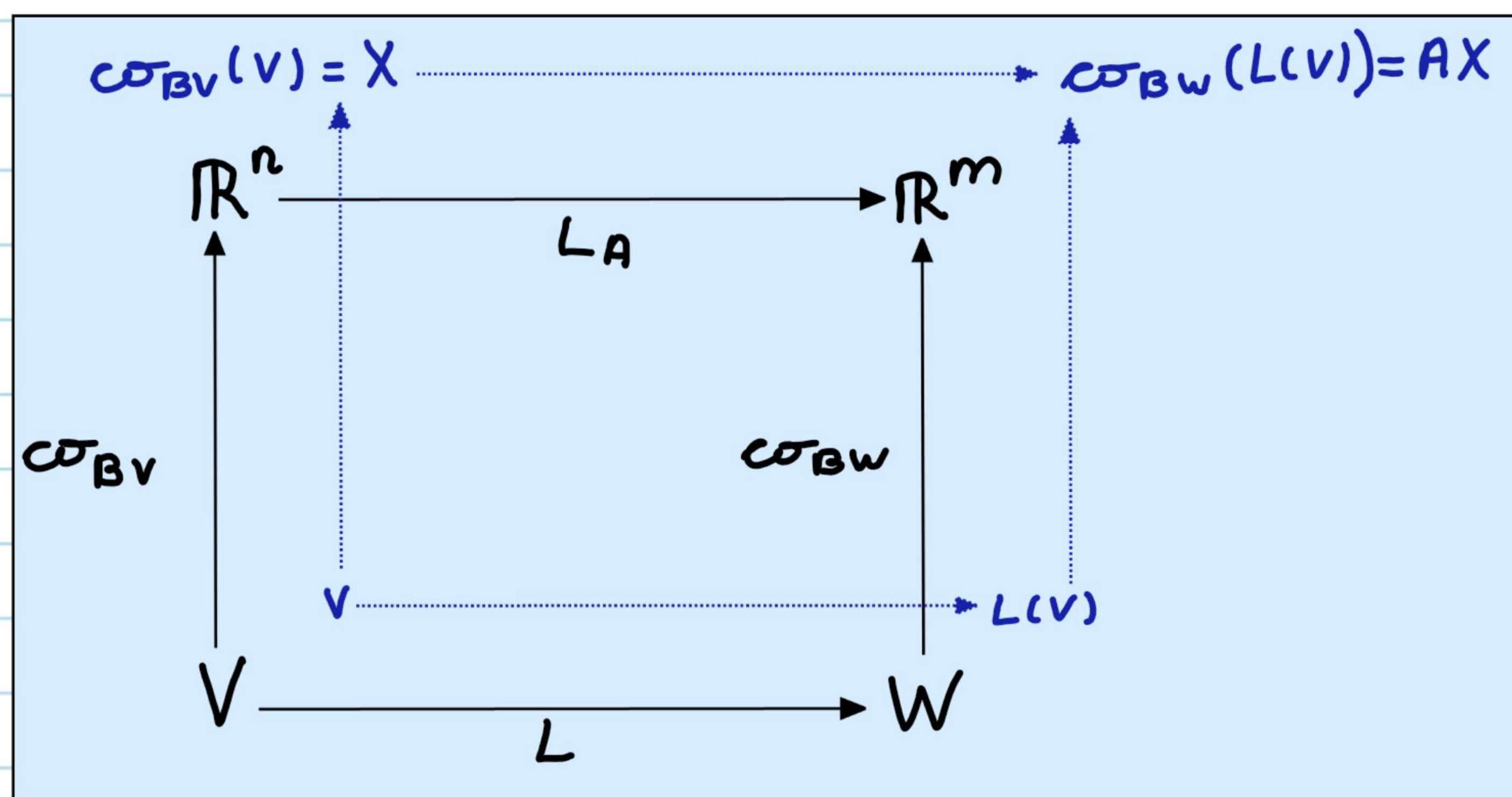
gegeven: $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdimensionaal,

$$B_V = \{v_1, \dots, v_n\}, B_W = \{w_1, \dots, w_m\},$$

$$L: V \rightarrow W: x \mapsto L(x), \sigma_{B_W}(L(x)) = L_{B_W}^{B_V} \cdot \sigma_{B_V}(x)$$

te zoeken: $L_{B_W}^{B_V}$

$$\begin{aligned} * &\rightarrow (L_{B_W}^{B_V})_{ij} = (\sigma_{B_W}(L(v_j)))_i \\ &\Rightarrow L_{B_W}^{B_V} \text{ heeft als } j\text{-de kolom } \sigma_{B_W}(L(v_j)) \end{aligned}$$



Stel $A = L_{B_W}^{B_V}$. Neem $x \in V$, schrijf $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Dan is $L(x) = \lambda_1 L(v_1) + \dots + \lambda_n L(v_n)$

Dus $\sigma_{B_W}(L(x)) = \lambda_1 \cdot \sigma_{B_W}(L(v_1)) + \dots + \lambda_n \cdot \sigma_{B_W}(L(v_n))$

Dus $(\sigma_{B_W}(L(x)))_i = \sum_{j=1}^n (\sigma_{B_W}(L(v_j)))_i \cdot \lambda_j$

$$\begin{aligned} * &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \lambda_j \quad \text{als } L_{B_W}^{B_V} = A = (a_{ij}) \\ &= \left(A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right)_i \end{aligned}$$

Dus $\sigma_{B_W}(L(x)) = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ met $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sigma_{B_V}(x)$

$$\sigma_{B_W}(L(x)) = L_{B_W}^{B_V} \cdot \sigma_{B_V}(x)$$

▷ L is uniek ▷

De vectorruimte van Lineaire afbeeldingen

prop. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten:

- ① Zij K en L Lineaire afbeeldingen van V naar W , dan:
 - $K+L: V \rightarrow W: v \mapsto (K+L)(v) = K(v) + L(v)$ ook een lineaire afb.;
 - $\lambda K: V \rightarrow W: v \mapsto (\lambda K)(v) = \lambda \cdot K(v) \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ook lineair.
- ② De verzameling van alle lineaire afbeeldingen van V naar W wordt met deze eigenschappen een reële vectorruimte.

↳ vectorruimte wordt genoteerd met $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$

bew. $(K+L)_{\beta_V}^{\beta_W} = K_{\beta_V}^{\beta_W} + L_{\beta_V}^{\beta_W}$

bewijs: Neem $v \in V$ willekeurig.

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta_W}((K+L)(v)) &= \sigma_{\beta_W}(K(v) + L(v)) \\ &= \sigma_{\beta_W}(K(v)) + \sigma_{\beta_W}(L(v)) \\ &= K_{\beta_V}^{\beta_W} \sigma_{\beta_V}(v) + L_{\beta_V}^{\beta_W} \sigma_{\beta_V}(v) \\ &= (K_{\beta_V}^{\beta_W} + L_{\beta_V}^{\beta_W}) \cdot \sigma_{\beta_V}(v) \quad \text{voor alle } v \in V \end{aligned}$$

Dus $(K+L)_{\beta_V}^{\beta_W} = K_{\beta_V}^{\beta_W} + L_{\beta_V}^{\beta_W} \quad \square$

st. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdimensionale vectorruimten met $\dim(V) = n$ en $\dim(W) = m$. Na het kiezen van β_V en β_W staat $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ in bijectief verband met $\mathbb{R}^{m \times n}$ via:

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n} : L \mapsto L_{\beta_V}^{\beta_W}$$

Samenstellen van Lineaire afbeeldingen

st. De samenstelling van twee lineaire afbeeldingen is opnieuw een lineaire afbeelding.

Bewijs: Zij $L: V \rightarrow W$ en $K: W \rightarrow U$ lineair

Neem $v_1, v_2 \in V$ willekeurig, dan:

$$\begin{aligned} (K \circ L)(v_1 + v_2) &= K(L(v_1 + v_2)) \\ &= K(L(v_1) + L(v_2)) \\ &= K(L(v_1)) + K(L(v_2)) \\ &= (K \circ L)(v_1) + (K \circ L)(v_2) \end{aligned}$$

analoog voor $(K \circ L)(\lambda v) = \lambda (K \circ L)(v)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

prop. $(K \circ L)_{\beta_U}^{\beta_V} = K_{\beta_W}^{\beta_U} \cdot L_{\beta_V}^{\beta_W}$

Bewijs: $\sigma_{\beta_U}((K \circ L)(v)) = \sigma_{\beta_U}(K(L(v)))$
 $= K_{\beta_W}^{\beta_U} \cdot \sigma_{\beta_W}(L(v))$
 $= K_{\beta_W}^{\beta_U} \cdot L_{\beta_V}^{\beta_W} \cdot \sigma_{\beta_V}(v) \quad \square$

Isomorfismen van vectorruimten

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ vectorruimten, dan is $L: V \rightarrow W$ een **isomorfisme** als L bijectief en lineair is.

→ Notatie: $V \cong W$, V en W zijn isomorf ↳ Stuur β_V af op β_W

st. Zij $L: V \rightarrow W$ een isomorfisme, dan is haar inverse $L^{-1}: W \rightarrow V$ ook een lineaire afbeelding.

Bewijs: Neem $\omega_1, \omega_2 \in W$ willekeurig.

$$TB: L^{-1}(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \cdot L^{-1}(\omega_1) + \lambda_2 \cdot L^{-1}(\omega_2)$$

$$VTB: L(L^{-1}(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2)) = L(\lambda_1 L^{-1}(\omega_1) + \lambda_2 L^{-1}(\omega_2)) \quad \text{want } L \text{ injectief}$$

$$LL: \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2$$

$$RL: \lambda_1 \cdot L(L^{-1}(\omega_1)) + \lambda_2 \cdot L(L^{-1}(\omega_2)) = \lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 \quad \square$$

st. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ eindigdimensionale vectorruimten, dan:

$$\textcircled{1} V \cong W \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W)$$

$$\textcircled{2} V \cong \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim(V) = n$$

prop. Zij $L: V \rightarrow W$ lineair en $A = L_{B'V}^{BW} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\dim(V) = \dim(W) = n$:

① L is een isomorfisme a.s.a. A inverteerbaar;

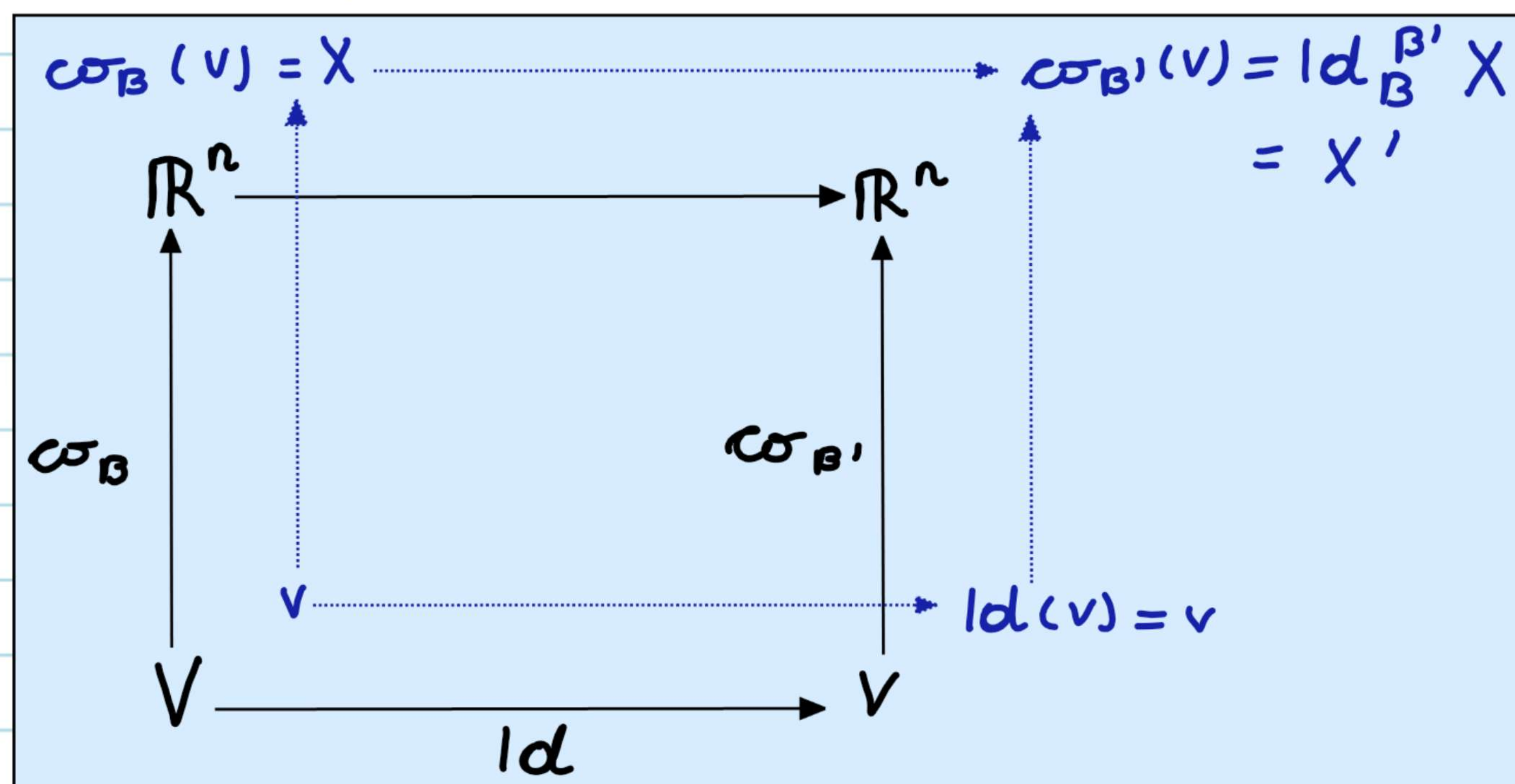
② Zij L een isomorfisme: $(L^{-1})_{BV}^{B'V} = (L_{B'V}^{BW})^{-1}$

$\rightarrow L_{B'V}^{BW} \cdot (L^{-1})_{BV}^{B'V} = (L \circ L^{-1})_{B'V}^{BW} = (\text{Id}_W)_{B'V}^{BW} = I_n$

zie opm 4.24 p. 166-167

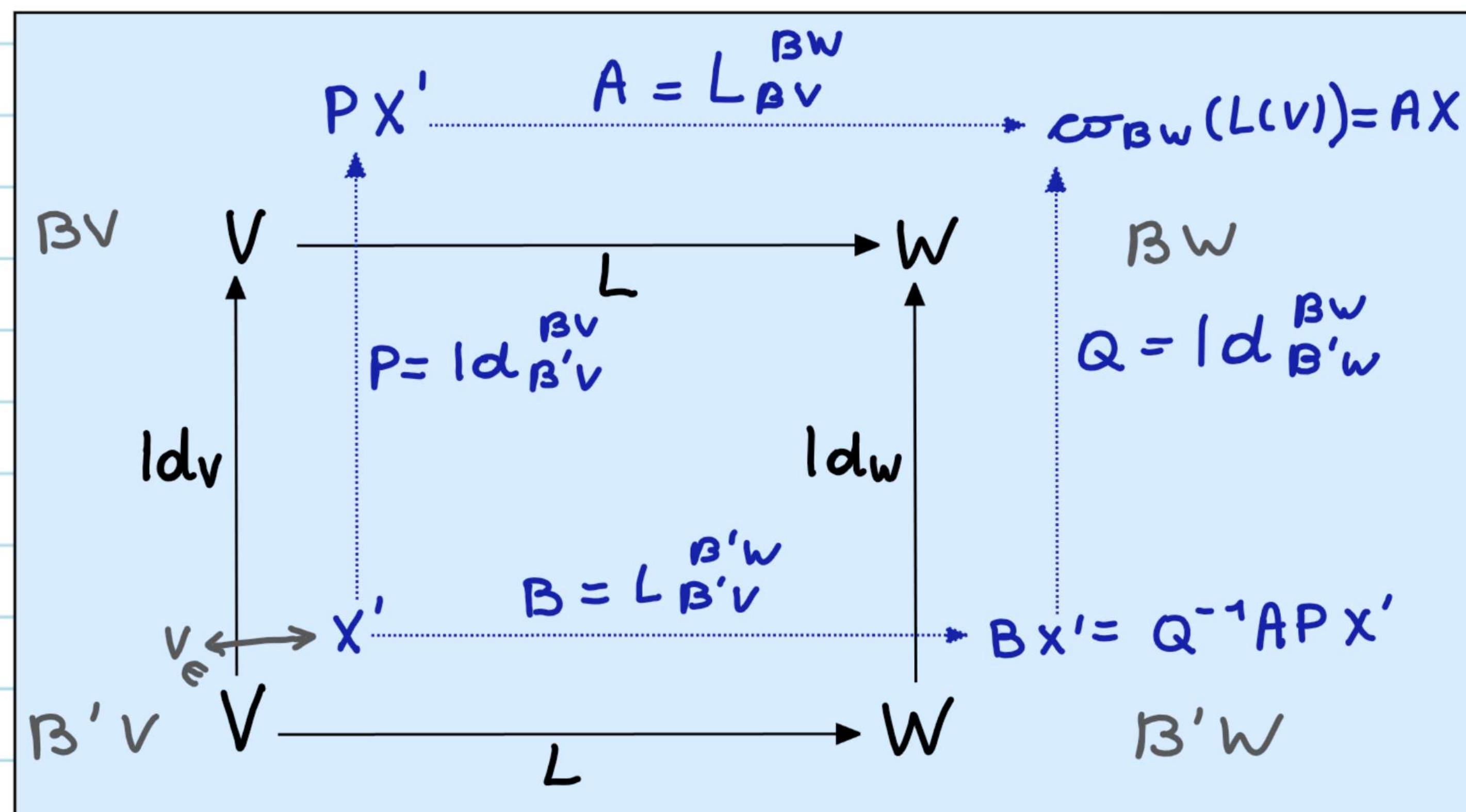
Invloed van het veranderen van basis

Invloed op coördinaat van een vector



$\text{Id}_{B'}^{B'}$ heeft als kolommen de coördinaten van B t.o.v. B'
 $\text{Id}_{B'}^{B'}$ is de **matrix** van basisverandering van B naar B'

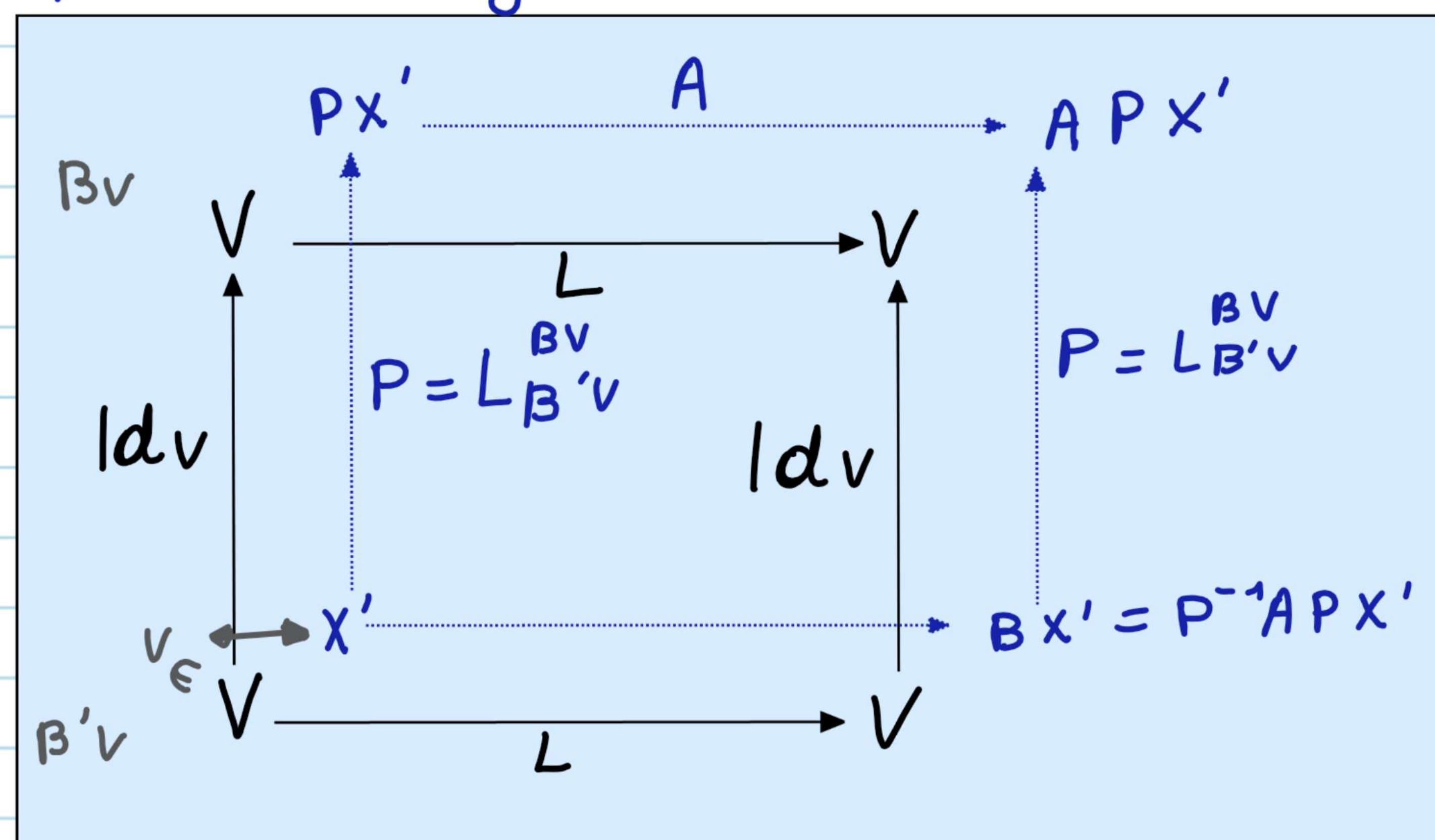
Invloed op de matrix van een lineaire afbeelding



$$B = Q^{-1} A P$$

$$L_{B'V}^{B'W} = \text{Id}_{B'W}^{B'W} \cdot L_{B'V}^{BW} \cdot \text{Id}_{BV}^{BV}$$

Speciaal geval: Lineaire transformatie



$$\det(L) = \det(L_{B'V}^{BV})$$

$$\det(L_{B'V}^{B'V}) = \det(P^{-1}) \cdot \det(L_{B'V}^{BV}) \cdot \det(P) = \det(L_{B'V}^{BV})$$

$\Rightarrow$ onafhankelijk van basis

def. Twee matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zijn **gelijkvormig** als er een inverteerbare $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is met $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

gev. De matrix van een lineaire transformatie wordt door basisverandering omgezet in een gelijkvormige matrix.

De dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen

def. Zij $L: (\mathbb{R}, V, +) \rightarrow (\mathbb{R}, W, +)$, dan is:

- de **kern** van L de deelruimte van V : $\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\}$;
- het **beeld** van L ($\text{Im}(L) = L(V)$) de deelruimte van W :
 $\text{Im}(L) = \{w \in W \mid \text{er bestaat een } v \in V \text{ met } L(v) = w\}$;
- de **rang** van L is de dimensie van $\text{Im}(L)$.

prop. $\text{Im}(L)$ is de vectorruimte voortgebracht door de beelden van een basis van V .

$$\hookrightarrow L(v) = \lambda_1 \cdot L(e_1) + \dots + \lambda_n \cdot L(e_n)$$

$$\Rightarrow \text{Im}(L) = \text{vct}\{L(e) \mid e \in \beta_V\}$$

st. Zij $L: V \rightarrow W$ Lineair, dan is L injectief a.s.a. $\ker(L) = \{0\}$

Bewijs: $\Rightarrow$ Neem $v \in \ker(L)$, dan $L(v) = 0 = L(0)$, omdat L injectief: $v = 0$.

$\Leftarrow$ Stel $L(v_1) = L(v_2)$, $L(v_1 - v_2) = L(v_1) - L(v_2) = 0$, dus $v_1 - v_2 = 0$, $v_1 = v_2$. $\square$

$$\nabla \ker(L) = \{x \in V \mid L_{\beta_V}^{\beta_W} \cdot x = 0\} \text{ en } \text{cor}_{\beta_W}(\text{Im}(L)) = C(L_{\beta_V}^{\beta_W})$$

st. Zij V eindigdimensionaal en $L: V \rightarrow W$ Lineair:

$$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}}(\ker(L)) + \dim_{\mathbb{R}}(\text{Im}(L)).$$

Bewijs: Kies een basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ voor $\ker(L)$.

Breid uit tot basis $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ van V .

$$\text{Bewering: } \text{Im}(L) = \text{vct}\left\{\underbrace{L(v_1)}_0, \dots, \underbrace{L(v_k)}_0, \underbrace{L(v_{k+1})}_0, \dots, \underbrace{L(v_n)}_0\right\}$$

$$= \text{vct}\{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$$

We hebben bewezen: $\{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$ is voortbrengend voor $\text{Im}(L)$

Bewering: $\{L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$ is vrij.

[Van zodra dat bewezen is:

$$\dim V = n, \dim(\ker(L)) = k, \dim(\text{Im}(L)) = n - k$$

$$\dim V = n = k + n - k = \dim(\ker(L)) + \dim(\text{Im}(L))$$

TB: stel $\alpha_{k+1} L(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n L(v_n) = 0$, dan $\alpha_i = 0 \forall i$

Merk op: $0 = \alpha_{k+1} L(v_{k+1}) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

$$= L(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n)$$

Dus $\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \ker(L)$,

verder is $\{v_1, \dots, v_k\}$ een basis voor $\ker(L)$.

Neem $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, zodat

$$\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

Dus $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \dots - \alpha_n v_n = 0$,

maar $\{v_1, \dots, v_n\}$ basis van V , dus $\alpha_i = 0 \forall i$ $\square$

$$\rightarrow \text{andere vorm: } \dim V = \underbrace{\dim(N(L_{\beta_V}^{\beta_W}))}_{= \text{corang } L_{\beta_V}^{\beta_W}} + \underbrace{\dim(C(L_{\beta_V}^{\beta_W}))}_{= \text{rang } L_{\beta_V}^{\beta_W}}$$

st. Zij $L: V \rightarrow W$ met V en W eindigdimensionaal, dan bestaan β_V en β_W , zodat $L_{\beta_V}^{\beta_W} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ met r de rang van L .

gev. Zij $L: V \rightarrow V: v \mapsto L(v)$ Lineair en $(\mathbb{R}, V, +)$ eindigdimensionaal, dan:

L is injectief $\Leftrightarrow L$ is surjectief $\Leftrightarrow L$ is bijectief

$\Rightarrow$ injectiviteit: $\ker(L) = \{0\} \Rightarrow \dim(\text{Im}(L)) = \dim(V) \Rightarrow \text{Im}(L) = V$
 $\Rightarrow L$ is surjectief

$\Leftarrow$ analoog $\square$

∇L is bijectief $= L$ is een isomorfisme.

Rang en eigenschappen

Herinner: $N(AB) \supset N(B)$

$$C(AB) \subset C(A)$$

$$R(AB) \subset R(B)$$

gev. $\text{rang van } AB \leq \min \{ \text{rang van } A, \text{rang van } B \}$

st. Zij $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dan zijn volgende equivalent:

- $\forall b \in \mathbb{R}^m$ is $A \cdot x = b$ oplosbaar, surjectief;

- $C(A) = \mathbb{R}^m$;

- $\text{rang}(A) = m$; $\rightarrow \dim(R(A)) = m$ $\downarrow$

- de rijen van A zijn lineair onafhankelijk.

st. Volgende zijn eveneens onderling equivalent:

- $\forall b \in \mathbb{R}^m$ heeft $A \cdot x = b$ hoogstens één oplossing, injectief;

- $N(A) = \{0\}$;

- $\text{rang}(A) = n$;

- de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk.

st. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn volgende equivalent:

- A is inverteerbaar;

- $\det(A) \neq 0$;

- $\text{rang}(A) = n$;

- de rijen van A zijn lineair onafhankelijk;

- de kolommen van A zijn lineair onafhankelijk.

Eigenwaarden, eigenvectoren & diagonaliseerbaarheid

Eigenwaarden en eigenvectoren

def. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ is een **eigenvector** van A als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat met $Av = \lambda v$. λ noemen we de **eigenwaarde** bij eigenvector v .

De veelterm $\varphi_A(x) = \det(x \cdot I_n - A)$ is de **karacteristieke veelterm** van A .

st. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ is een eigenwaarde van A a.s.a. λ een nulpunt is van $\varphi_A(x)$. (a.s.a. $(A - \lambda I_n) \cdot x = 0$ heeft opl. $x \neq 0$)

def. Zij $L: V \rightarrow V$ lineair, $v \in V$ met $v \neq 0$ is een eigenvector van L als er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat met $L(v) = \lambda v$ (λ is de eigenwaarde bij v).

Eigenwaarden & -vectoren vinden:

① $\varphi_A(x) = \det(x \cdot I_n - A) = 0$ oplossen voor eigenwaarden λ_i

② eigenvectoren zijn niet-nuloplossingen van $(\lambda_i I_n - A) v = 0$

Stel $L: V \rightarrow V$ met $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van V

$\bullet L(v_i) = \lambda v_i \Leftrightarrow \text{co}_B(L(v_i)) = (0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0)$

i -de positie

$\bullet \{v_1, \dots, v_n\}$ is een basis van eigenvectoren a.s.a. $L|_B$ diagonaal

def. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is **diagonaliseerbaar** als A gelijkvormig is met een diagonaal matrix.

$L: V \rightarrow V$ is diagonaliseerbaar als V een basis heeft die volledig bestaat uit eigenvectoren van L .

st. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar a.s.a. $\mathbb{R}^n$ een basis heeft die volledig bestaat uit eigenvectoren van A .

zie bewijs p. 217 - 218

st. Gelijkvormige matrices hebben gelijke karakteristieke veeltermen, determinanten en sporen.

Bewijs: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ ($A, B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, P inverteerbaar)

$$\varphi_B(x) = \det(x I_n - P^{-1} \cdot A \cdot P)$$

$$= \det(P^{-1}(x I_n - A)P)$$

$$= \det(P^{-1}) \cdot \det(x I_n - A) \cdot \det(P)$$

$$= \varphi_A(x)$$

$$\det(B) = \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(A)$$

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \text{Tr}(P \cdot P^{-1} \cdot A) = \text{Tr}(A) \quad \square$$

gev: De karakteristieke veelterm, determinant en spoor van een matrix van een lineaire transformatie zijn onafhankelijk van de gekozen basis. (eindigdimensionaal)

Zij α een basis van V . De coördinaatvectoren (t.o.v. α) van de eigenvectoren van L bij λ , zijn de eigenvectoren van $L|_{\alpha}$ bij λ .

Spectrum en eigenruimten

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ en $L: V \rightarrow V$ een lineaire transformatie. Het **spectrum** van L is de verzameling van eigenwaarden van L , $\text{Spec}(L) \subset \mathbb{R}$.

def. De **algebraïsche multipliciteit** $m(\lambda)$ van een λ bij L is de multipliciteit van λ als nulpunt van $\varphi_L(x)$.

def. Zij $L: V \rightarrow V$ lineair en $\lambda \in \text{spec}(L)$, dan is $E_\lambda = \{v \in V \mid L(v) = \lambda v\}$ een deelruimte van V . We noemen E_λ de **eigenruimte** bij λ . Als E_λ eindigdimensionaal, dan is $d(\lambda) = \dim_{\mathbb{R}}(E_\lambda)$ de **meetkundige multipliciteit** van λ .

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan is $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot v = \lambda \cdot v\} = N(A - \lambda I_n)$.

St. Stel $L: V \rightarrow V$ Lineair (V eindigdimensionaal), $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, dan:

- ① $m(\lambda_i) \geq 1$;
- ② $d(\lambda_i) \geq 1$;
- ③ $d(\lambda_i) \leq m(\lambda_i)$.

Bewijs ③: Kies een basis $\{v_1, \dots, v_k\}$ voor E_λ .

Dus $k = \dim(E_\lambda) = d(\lambda)$.

Breid uit tot basis $\beta = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_e\}$ van V .

Wat is L_β^β ?

De i -de kolom met $1 \leq i \leq k$ is $\sigma_\beta(L(v_i)) = \sigma_\beta(\lambda v_i) = (0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0)$

$$\text{Dus } L_\beta^\beta = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_k & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_k & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \text{ met } B \in \mathbb{R}^{k \times e}, D \in \mathbb{R}^{e \times e}$$

k kolommen e kolommen

i -de positie

$$\begin{aligned} \varphi_L(x) &= \det(x \cdot I_{k+e} - L_\beta^\beta) \\ &= \det \left(\begin{array}{c|c} (x-\lambda)I_k & -B \\ \hline 0 & xI_e - D \end{array} \right) = \underbrace{(x-\lambda)^k}_{\text{minstens } k \text{ keer voorop zetten}} \cdot \overbrace{\det(xI_e - D)}^{\varphi_D(x)} \end{aligned}$$

Dus moet $m(\lambda) \geq k = d(\lambda)$. $\square$

Diagonaliseerbaarheid van een Lineaire transformatie
 st. De eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden zijn Lineair onafhankelijk.

Bewijs: gegeven: $\{v_1, \dots, v_k\}$ met $L(v_i) = \lambda_i v_i \forall v_i$ met alle λ_i onderling versch.

TB: alle v_i zijn Lineair onafhankelijk ($\{v_1, \dots, v_k\}$ is vrij)

bewijs via inductie op k :

$k=1$: ok

Stel dat de eigenschap geldt voor k eigenvectoren.

Neem eigenvectoren $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ met verschillende λ_i .

Stel $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} = 0$

TB: alle $\alpha_i = 0$

① $\alpha_{k+1} = 0$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, IH: $\{v_1, \dots, v_k\}$ L.O., dus alle $\alpha_i = 0$

② $\alpha_{k+1} \neq 0$

Dan $v_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} v_k$

Stel $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{k+1}}$. Dus $v_{k+1} = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$. *

Pas L toe: $L(v_{k+1}) = \beta_1 L(v_1) + \dots + \beta_k L(v_k)$

$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \beta_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \beta_k \lambda_k v_k$

Uit *: $\lambda_{k+1} v_{k+1} = \beta_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \beta_k \lambda_{k+1} v_k$

Dus: $\beta_1 \lambda_{k+1} v_1 + \dots + \beta_k \lambda_{k+1} v_k = \beta_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \beta_k \lambda_k v_k$

$\beta_1 (\lambda_{k+1} - \lambda_1) v_1 + \dots + \beta_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k) v_k = 0$

$\neq 0$, λ_{k+1} verschillend van alle λ_i met $i \in \{1, \dots, k\}$

Volgens IH: $\beta_i \cdot (\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$

Dus $\beta_i = 0 \forall i$. Wegens *: $v_{k+1} = 0$. $\nless$ Dat kan niet. $\square$

def. Het spectrum van $L: V \rightarrow V$ Lineair met $\dim(V) = n$ is

enkelvoudig als $\#\text{Spec}(L) = n$. $\rightarrow n$ eigenwaarden met $m(\lambda_i) = 1$

gev. Een Lineaire transformatie met enkelvoudig spectrum is diagonaliseerbaar.

$\rightarrow n$ L.O. eigenvectoren $\rightarrow$ basis van V

Lemma Zij L diagonaliseerbaar, dan is $\varphi_L(x)$ volledig te ontbinden als product van eerstegraadsfactoren. $\varphi_L(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$

Bewijs: Zij $\{v_1, \dots, v_n\}$ een basis van eigenvectoren zodat $L_B^B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, dan is $\varphi_L(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$. $\square$

st. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ met $\dim(V) = n$ en $L: V \rightarrow V$ lineair waarvan $\varphi_L(x)$ volledig ontbindt over $\mathbb{R}$ en $\text{Spec}(L) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

L is diagonaliseerbaar a.s.a. $\forall \lambda_i \in \text{Spec}(L): d(\lambda_i) = m(\lambda_i)$.

Bewijs: $\Rightarrow$ L is diagonaliseerbaar, dus V heeft een basis B van eigenvectoren van L .

Schrijf B zo dat de eigenvectoren van L geordend zijn per overeenkomstige eigenwaarde: de eerste m_1 vectoren komen overeen met λ_1 enz.

Het volstaat om de diagonaalmatrix op te stellen van L t.o.v. B om te zien dat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i \forall \lambda_i$.

• $m(\lambda_i) = m_i$: L is diagonaliseerbaar, dus L_B^B is een diagonaalmatrix waarbij elke λ_i juist m_i keer voorkomt.

Bij $\varphi_L(x)$ zal $(x - \lambda_i)$ juist m_i keer voorkomen. Dus $m(\lambda_i) = m_i \forall \lambda_i$.

• $d(\lambda_i) = m_i$: L is diagonaliseerbaar, dus er is een basis voor V bestaande uit eigenvectoren van L .

Deze en iedere deelverzameling ervan zijn L.O.

Voor elke λ_i zijn de m_i eigenvectoren L.O.

Elke deelverz. bij een λ_i is voortbrengend voor E_{λ_i} . Deze vormen dus een basis voor E_{λ_i} .

Dus $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i = d(\lambda_i)$.

Dan $m(\lambda_i) = d(\lambda_i)$

$\Leftarrow$ Stel dat voor elke $\lambda_i: d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i$.

Merk op dat $m_1 + \dots + m_k = n$ omdat $\varphi_L(x)$ volledig ontbindt.

We kiezen basissen $\{v_{i1}, \dots, v_{im_i}\}$ voor E_{λ_i}

Dan vormt B een verzameling van n elementen:

$$B = \{v_{11}, \dots, v_{1m_1}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{km_k}\}$$

TB: B is vrij.

$$\text{Stel: } x_{11}v_{11} + \dots + x_{1m_1}v_{1m_1} + \dots + x_{k1}v_{k1} + \dots + x_{km_k}v_{km_k} = 0 \quad *$$

Merk op

$$\begin{aligned} x_{11}v_{11} + \dots + x_{1m_1}v_{1m_1} &= u_1 \in E_{\lambda_1} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{k1}v_{k1} + \dots + x_{km_k}v_{km_k} = u_k \in E_{\lambda_k}$$

Invullen in $*$: $u_1 + \dots + u_k = 0$, waarbij elke u_i bij een verschillende eigenwaarde hoort (dus L.O.)

$$u_1 + \dots + u_k = 0 \text{ a.s.a. } u_1 = \dots = u_k = 0$$

Omdat $\{v_{i1}, \dots, v_{im_i}\}$ een basis is van E_{λ_i} en $x_{i1}v_{i1} + \dots + x_{im_i}v_{im_i} = 0$, geldt $x_{i\ell} = 0 \forall i, \ell$, B is dus vrij.

Omdat B vrij is en B $n = \dim V$ elementen bevat, vormt deze een basis voor V , bestaande uit eigenvectoren van L .

Hieruit volgt dat L diagonaliseerbaar is. $\square$

prop. Als L volledig ontbindt over $\mathbb{R}$, dan:

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{Tr}(L) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (\lambda_i \text{ mag meermaals voorkomen}).$$

Transformaties van complexe vectorruimten

St. Elke VT in $\mathbb{C}[x]$ kan volledig ontbonden worden als product van eerstegraadsfactoren.

→ Nu: $\lambda \in \mathbb{C}$

def. $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ is diagonaliseerbaar (over $\mathbb{C}$) als A gelijkvormig is met een diagonaalmatrix, $\exists P \in \mathbb{C}^{n \times n}$: P is inverteerbaar: $P^{-1}AP$ is een (complexe) diagonaalmatrix.

$L: (\mathbb{C}, V, +) \rightarrow (\mathbb{C}, V, +)$ Lineair is diagonaliseerbaar als V een basis heeft, bestaande uit eigenvectoren van L .

Inproductruimten & Euclidische ruimten

Inproducten en Hermitische producten

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ reëel. Een **inproduct** (inwendig product) op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

met volgende eigenschappen: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is:

① **Lineair in de eerste component**: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \forall v_1, v_2, w \in V$:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$$

② **symmetrisch**: $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

③ **positief**: $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$

④ **definieert**: $\forall v \in V : \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

↳ **Inproductruimte**: $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

→ ① en ② $\Rightarrow$ Lineariteit in de tweede component

$$\hookrightarrow \langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$$

→ $\forall w \in V : \langle \cdot, w \rangle : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \langle v, w \rangle$ ook lineaire afbeelding

Wat bij complexe getallen? $a+bi = a-bi$ en $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

def. Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ complex. Een **Hermitisch product** op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

met volgende eigenschappen: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is:

① **Lineair in de tweede component**: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} : \forall v_1, v_2, w \in V$:

$$\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$$

①.5 toegevoegd lineair in de eerste component: $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle$

$$= \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle$$

② $\forall v, w \in V : \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

③ $\forall v \in V : \langle v, v \rangle \geq 0$ en $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

④ $\forall v \in V : \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

↳ **Hermitische ruimte**: $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Enkele standaardvormen:

• inproduct op $\mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = x^T \cdot y$$

• Hermitisch product op $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} \cdot y_i = \overline{x}^T \cdot y$$

• continue functies in $\mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

• matrices in $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T \cdot B)$$

• in het vlak $\mathbb{R}^2$ (dotproduct):

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos \alpha$$

Euclidische meetkunde en Euclidische ruimte

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dan is voor elke $v \in V$ de **norm** (lengte):

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Als $\|v\| = 1$, dan is v **genormeerd** / een **eenheidsvector**.

↳ idem voor $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

St. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ met $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} : \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, dan geldt:

• $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \forall v \in V : \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$

• $\forall v \in V : \|v\| \geq 0$ en $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ $\|v\| = 0 = \sqrt{\langle v, v \rangle} \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

v kan **genormeerd** worden door $v \cdot \frac{1}{\|v\|}$

Zij $\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\overline{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$

↳ norm, niet absolute waarde

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (idem voor $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$), dan is voor willekeurige $v, w \in V$, $d(v, w) = \|v - w\|$ de **afstand** tussen v en w .

st. De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dan geldt $\forall v, w \in V$:

$$① |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

$$② |\langle v, w \rangle| = \|v\| \cdot \|w\| \Leftrightarrow v \text{ en } w \text{ Lineair afhankelijk}$$

Bewijs: ① $\forall t \in \mathbb{R}: \langle v + tw, v + tw \rangle \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle v + tw, v + tw \rangle &= \langle v, v + tw \rangle + t \langle w, v + tw \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + t \langle v, w \rangle + t \langle w, v \rangle + t^2 \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2t \langle v, w \rangle + t^2 \|w\|^2 \end{aligned}$$

$D \leq 0$ (het moet altijd $\geq$ zijn, niet $\neq$ of $\neq$)

$$D = (2 \langle v, w \rangle)^2 - 4 \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \leq 0$$

$$4 \langle v, w \rangle^2 \leq 4 \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

$$② \Leftrightarrow v = \lambda w \text{ voor een } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$|\langle v, w \rangle| = |\langle \lambda w, w \rangle| = |\lambda| \cdot |\langle w, w \rangle| = |\lambda| \cdot \|w\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|w\|$$

$$\Rightarrow D = 0, \exists t \in \mathbb{R} \text{ met } t^2 \|w\|^2 + 2t \langle v, w \rangle + \|v\|^2 = 0 = \|v + tw\|^2$$

Dus $v + tw = 0$, waardoor v en w Lineair afhankelijk.

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $v, w \in V \setminus \{0\}$, dan is de **hoek tussen v en w** de unieke hoek $\theta \in [0, \pi]$ met:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

v en w zijn **orthogonaal** (of $\perp$) als $\langle v, w \rangle = 0$, noteer $v \perp w$.

$\rightarrow$ als $v \neq 0$ en $w \neq 0$ geldt $v \perp w$ als $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow$ idem voor $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

st. De driehoeksongelijkheid

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ met norm $\|\cdot\|$, dan geldt voor alle $v, w \in V$:

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

$$\begin{aligned} \text{Bewijs: } \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2 \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &\stackrel{①}{\leq} \|v\|^2 + 2 \|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 \quad \square \end{aligned}$$

$\rightarrow$ ook $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$\rightarrow$ in $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ analoog

def. Een eindig dimensionale inproductruimte is een **Euclidische ruimte**. Hermitische ruimte
unitaire ruimte

$\rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is een n -dimensionale Euclidische ruimte met het standaard inproduct.

$\rightarrow (\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ is een n -dimensionale unitaire ruimte met het standaard Hermitisch product.

Orthonormale basis, orthogonaal complement

st. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ met $\forall v_i, v_j \in \alpha: i \neq j: v_i \perp v_j$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Dan is α vrij.

Bewijs: Stel $v_1, \dots, v_n$ alle $\perp$ en $\neq 0$, TB: $v_1, \dots, v_n$ L.O.

Stel $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ met $\alpha_i \in \mathbb{R} \forall i$, TB: Alle $\alpha_i = 0$

bekijk $0 = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_i \rangle$

$$= \alpha_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_i \rangle$$

$$= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2$$

Omdat $\|v_i\| > 0$, zal $\alpha_i = 0$ $\square$

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis voor V zodat:

① $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ voor alle $i \neq j$;

② $\|v_i\| = 1$ voor alle i .

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{als } i \neq j \\ 1 & \text{als } i = j \end{cases}$$

β is dan een **orthonormale basis** van V

↳ indien enkel ①: orthogonale basis

vb: $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$, dan $\langle x, v_i \rangle = x_i \quad \forall i$, dus $x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i$

St. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$

een orthonormale basis van V . Zij $v, w \in V$ met

$\text{co}_\beta(v) = (x_1, \dots, x_n)$ en $\text{co}_\beta(w) = (y_1, \dots, y_n)$, dan is $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Dan $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ en $w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= 0 \text{ als } i \neq j$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle \text{co}_\beta(v), \text{co}_\beta(w) \rangle$$

St. **Orthogonalisatieprocédé van Gram-Schmidt**

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\{v_1, \dots, v_n\}$ een willekeurige basis van V , dan kan deze basis omgevormd worden tot een orthonormale basis $\{u_1, \dots, u_n\}$ van V .

Werkwijze: We construeren $u_1, \dots, u_n$ inductief, zodat $\{u_1, \dots, u_k\}$ orthonormaal is en $\text{vct}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{vct}\{u_1, \dots, u_k\}$

① Stel $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

② Stel $w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$

Merh op: $\langle w_2, u_1 \rangle = \langle v_2, u_1 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} = 0$

Stel $u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$, dan is $\{u_1, u_2\}$ orthonormaal en $\text{vct}\{u_1, u_2\} = \text{vct}\{u_1, w_2\} = \text{vct}\{u_1, v_2\} = \text{vct}\{v_1, v_2\}$

③ We hebben orthonormale $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$ met

$$\text{vct}\{u_1, \dots, u_{k-1}\} = \text{vct}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$$

We produceren u_k :

Stel $w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i$

Bewering: ① $w_k \perp u_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k-1\}$ ② $w_k \neq 0$

$$\textcircled{a} \langle w_k, u_j \rangle = \langle v_k, u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=0 \text{ als } i \neq j}$$

$$= \langle v_k, u_j \rangle - \langle v_k, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle}_{=1} = 0$$

③ Als $w_k = 0$, dan is $v_k \in \text{vct}\{u_1, \dots, u_{k-1}\} =$

$\text{vct}\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ en dit kan niet ($\{v_1, \dots, v_n\}$ l.o.)

Stel $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}$, dan is $\{u_1, \dots, u_k\}$ orthonormaal.

Ook $\text{vct}\{u_1, \dots, u_k\} = \text{vct}\{u_1, \dots, w_k\} = \text{vct}\{v_1, \dots, v_k\}$ □

Loodrechte projecties

def. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $U \subset V$, dan is het **orthogonaal complement** van U : deelruimte

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \quad \forall u \in U\} \rightarrow \text{deelruimte van } V$$

St. Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U deelruimte van V , dan:

① $U + U^\perp$ is een directe som

bew: TB: $U \cap U^\perp = \{0\}$

$$u \perp u$$

Neem $u \in U \cap U^\perp$, dan is $\langle u, u \rangle = 0$, dus $u = 0$. □

② $U \oplus U^\perp = V$

bew: Neem $v \in V$, TB: $v = v_1 + v_2$ met $v_1 \in U$ en $v_2 \in U^\perp$

Neem een orthonormale basis $\{u_1, \dots, u_k\}$ voor U .

Stel $v_1 = \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \cdot u_i$, dan is $v_1 \in U$.

$\perp$ projectie van v op U

Stel $v_2 = v - v_1$, dan is $v = v_1 + v_2$

TB: $v_2 \in U^\perp$

VTB: $v_2 \perp u_j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$

$$\begin{aligned} \langle v_2, u_j \rangle &= \langle v, u_j \rangle - \langle v_1, u_j \rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \cdot u_i, u_j \right\rangle \\ &= \langle v, u_j \rangle - \sum_{i=1}^k \langle v, u_i \rangle \cdot \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=1 \text{ als } i=j, =0 \text{ als } i \neq j} \\ &= \langle v, u_j \rangle - \langle v, u_j \rangle \cdot \langle u_j, u_j \rangle = 0 \quad \square \end{aligned}$$

③ $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$

$\hookrightarrow$ dimensieformule

④ $(U^\perp)^\perp = U$

bew: $U \subset (U^\perp)^\perp$: $u \in U$ staat $\perp$ op alle in $U^\perp$.

$$(U^\perp)^\perp = U: \dim((U^\perp)^\perp) = \dim(V) - \dim(U^\perp) = \dim(U)$$

dus $U = (U^\perp)^\perp$. $\square$

St. Zij U een deelruimte van de Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $v \in V$, dan is $p(v)$ de vector in U op minimale afstand van v .

$\hookrightarrow \beta = \{u_1, \dots, u_k\}$ een orthonormale basis van U , dan

$$p: V \rightarrow V: v \mapsto p(v) = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

def. $p(v)$ is dan de **orthogonale projectie** van v op U

Herinner: $d(u, v) = \|u - v\|$, $\|w\| = \sqrt{\langle w, w \rangle}$

Bewijs: schrijf $v = v_1 + v_2$ met $v_1 \in U$, $v_2 \in U^\perp$

Dan is v_1 het punt in U zo dicht mogelijk bij v .

TB: $\forall w \in U, w \neq v_1: d(v, w) > d(v, v_1)$

$$\|v - w\| > \|v - v_1\|$$

$$\text{dus } v - w = \underbrace{(v_1 - w)}_{\in U} + \underbrace{v_2}_{\in U^\perp} \quad \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 \text{ als } a \perp b$$

$$\|v - w\|^2 = \|v_1 - w\|^2 + \|v_2\|^2 > \|v_2\|^2 = \|v - v_1\|^2 \quad \square$$

Transformaties met een symmetrische matrix

lemma. Zij $L: V \rightarrow V$ lineair en symmetrisch, dan zijn eigenvectoren bij verschillende eigenwaarden orthogonaal.

Bewijs: stel $L(v) = \lambda v$, $L(w) = \mu w$ met $\lambda \neq \mu$

$$\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle \text{ zie volgende bladzijde}$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \mu w \rangle$$

$$\lambda \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$$

$$(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0$$

$$\text{dus } \langle v, w \rangle = 0, v \perp w. \quad \square$$

lemma. Zij $L: V \rightarrow V$ lineair en symmetrisch, dan geldt voor elke $\lambda \in \text{Spec}(L)$: $d(\lambda) = m(\lambda)$.

$\hookrightarrow$ zie bewijs p. 279 - 280

Spectraalstelling

Vorbereiding:

Zij $L: V \rightarrow V$ met $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis voor V en $A = L_\beta^\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Herinner: $\text{co}_\beta(L(v)) = A \cdot \text{co}_\beta(v)$

opm: $A_{ij} = \langle A \cdot e_j, e_i \rangle$ met $\{e_1, \dots, e_n\}$ standaardbasis van $\mathbb{R}^n$.
 $= (A \cdot e_j)_i = \sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot (e_j)_k = A_{ij}$

Bewering: volgende uitspraken zijn equivalent:

① A is symmetrisch

② $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

③ $\langle L(v), w \rangle = \langle v, L(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$

Bewijs: ① $\Rightarrow$ ②: Neem $x = e_j$ en $y = e_i$

$$\langle Ax, y \rangle = \langle A e_j, e_i \rangle = A_{ij}$$

$$\langle x, Ay \rangle = \langle e_j, A e_i \rangle = A_{ji}$$

Omdat A symmetrisch: $\langle A e_j, e_i \rangle = \langle e_j, A e_i \rangle$.

$\rightarrow$ neem hiervan een lineaire combinatie.

② $\Rightarrow$ ③: $\langle L(v), w \rangle = \langle \text{co}_\beta(L(v)), \text{co}_\beta(w) \rangle$

$$= \langle A \text{co}_\beta(v), \text{co}_\beta(w) \rangle$$

$$= \langle \text{co}_\beta(v), A \text{co}_\beta(w) \rangle$$

$$= \langle \text{co}_\beta(v), \text{co}_\beta(L(w)) \rangle$$

$$= \langle v, L(w) \rangle$$

③ $\Rightarrow$ ①: $\langle L(u_j), u_i \rangle = A_{ij} = \langle u_j, L(u_i) \rangle = A_{ji}$

want $\text{co}_\beta(u_i) = e_i$ $\square$

st. **Spectraalstelling** voor symmetrische matrices:

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $L_A: V \rightarrow V: x \mapsto Ax$ lineair met A symmetrisch, dan bestaat er een orthonormale basis voor V bestaande uit eigenvectoren van A .

Bewijs: Deel 1: Als $A = A^T$, dan ontbindt φ_A volledig over $\mathbb{R}$.

VTB: Als $\lambda \in \mathbb{C}$ en $\varphi_A(\lambda) = 0$, dan $\lambda \in \mathbb{R}$. $\rightarrow$ langs $\mathbb{C}$, $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$

Neem zo'n λ en neem $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, $Ax = \lambda x$.

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$$

$$\langle \lambda x, x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle$$

$$\bar{\lambda} \langle x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle, \text{ Omdat } \langle x, x \rangle \neq 0, \text{ is } \bar{\lambda} = \lambda, \text{ dus } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Deel 2: Als $L: V \rightarrow V$ symmetrisch en W deelruimte van V met $L(W) \subset W$, dan $L(W^\perp) \subset W^\perp$.

Neem $v \in W^\perp$, TB: $L(v) \in W$, Neem $w \in W$

$$\text{VTB: } \langle L(v), w \rangle = 0$$

$$= \underbrace{\langle v, L(w) \rangle}_{\substack{\in W^\perp \quad \in W}} = 0$$

Samenvoeging: Stel $\dim(V) = n$. We construeren inductief orthonormale eigenvectoren $\{u_1, \dots, u_n\}$

① $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (willekeurige basis van A : $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$)

② Stel dat we $\{u_1, \dots, u_k\}$ hebben met $k < n$. Construeer u_{k+1} :

Stel $W = \text{vct}\{u_1, \dots, u_k\}$, dan is $L(W) \subset W$, want $L(w) = \text{vct}\{L(u_1), \dots, L(u_k)\} = \text{vct}\{\lambda_1 u_1, \dots, \lambda_k u_k\} \subset W$. Dus door deel 2: $L(W^\perp) \subset W^\perp$.

beperk L tot $W^\perp$, $L_0: W^\perp \rightarrow W^\perp$ die nog altijd voldoet aan $\langle L_0(v), w \rangle = \langle v, L_0(w) \rangle$ (nog altijd symmetrisch).

Wegens deel 1: Neem eigenvector v_{k+1} van L_0 en stel

$$u_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|} \cdot \square$$

St. Spectraalstelling voor Hermitische matrices

Zij $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard unitaire ruimte en $L_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n: X \mapsto AX$ Lineair met Hermitische matrix A .
Dan is er een orthonormale basis voor $\mathbb{C}^n$ bestaande uit eigenvectoren van A .

→ A is gelijkvormig met een diagonaalmatrix

Orthogonale matrices

$P^{-1}AP = A \rightarrow P$ matrix van basisverandering t.o.v. O.N.B.

St. Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dan zijn volgende equivalent:

① de kolommen van A vormen een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$;

② $A^T \cdot A = I_n$;

③ $A^{-1} = A^T$;

④ $A \cdot A^T = I_n$;

⑤ de rijen van A vormen een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$.

def. Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is **orthogonaal** als $A^T = A^{-1}$.

St. Zij $A, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met P orthogonaal. A is symmetrisch a.s.a.

$P^{-1}AP = P^TAP$ een diagonaalmatrix is.

Lemma. Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonaal, dan:

① $\det(A) \in \{-1, 1\}$;

② elke (reële) eigenwaarde gelijk is aan 1 of -1.

$$\hookrightarrow \lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle = v^T A^T A v = v^T v = \langle v, v \rangle$$

St. Zij $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de standaard Euclidische ruimte en $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n: X \mapsto AX$ met A orthogonaal, dan:

① $\|AX\| = \|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$;

② $d(AX, AY) = d(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$;

③ L_A is een isomorfisme;

④ zij $\{u_1, \dots, u_n\}$ een orthonormale basis van $\mathbb{R}^n$, dan is $\{L(u_1), \dots, L(u_n)\}$ eveneens een O.N.B. van $\mathbb{R}^n$.

$$\rightarrow \langle AX, AY \rangle = X^T A^T A Y = X^T Y = \langle X, Y \rangle$$

→ $\ker(L_A) = \{0\}$, dus L_A injectief (0 is geen eigenwaarde van A).

→ L_A bewaart lengte en orthogonaliteit.

⇒ L_A is een isometrie (bijjectie die lengte, hoeken en afstand respecteert).

St. Zij $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermitisch, dan bestaat er een unitaire $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$, met $P^{-1}AP = \bar{P}^T A P$ een diagonaalmatrix.

→ P is **unitair** a.s.a. $\bar{P}^T = P^{-1}$.

Lemma. Zij $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitair, dan:

① $\text{mod}(\det(A)) = 1$;

② $\forall \lambda \in \text{Spec}(A): \text{mod}(\lambda) = 1$.

(zie st. 6.57)