

Mag dit?

21. Zij A vierkante matrix, Toon aan:

x a) AA^T en $A+A^T$ zijn symm.:

Neem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dus $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, willkeurig

$$AA^T = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \text{ is symm.}$$

$$A+A^T = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \text{ is symm.}$$

b) $A-A^T$ is scheefsymm.:

$$A-A^T = \begin{pmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{pmatrix} \text{ is scheefsymm.}$$

✓ c) Bepaal unieke schrijfwijze v. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ als som v. symm. en scheefsymm. matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 2 & -1/2 \\ 2 & -1/2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 2 \\ -3/2 & 0 & -1/2 \\ -2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

x 24. Bepaal inverse v. matrix, als ze bestaat.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (A_1 | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2/5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + 2R_2 \\ R_3 - 4R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & -4/5 & -5/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \cdot (-5)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6/5 & 2/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 1 & 3/5 & 1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -4/5 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - 6R_3 \\ R_2 - 3R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 26/5 & 24/5 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 13/5 & 14/5 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Rekenfout

39.

Waar / $\overline{\text{nt}}$. waar? Toon aan of geef tegenvb:

a) Als A en B matrices $\overline{\text{zn}}$, zodat $AB=0$, dan is $A=0$ of $B=0$

Fout

Neem $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ en dus is deze uitspraak $\overline{\text{nt}}$ waar

b) Als A en B matrices $\overline{\text{zn}}$, zodat $A^2=I$ en $B^2=I$, dan geldt

Waar

$(AB)^{-1} = BA$ waar als A en B $(n \times n)$ -matrices $\overline{\text{zn}}$.

Als $A^2=I$, dan is ook $A=I$. Dit geldt ook voor $B^2=I$, dus ook $B=I$. Als we de eenheidsmatrix verm. met zichzelf, bekomen we weer de eenheidsmatrix.

De inverse vke eenheidsmatrix is ook deze eenheidsmatrix, dus kunnen we besluiten dat $(AB)^{-1} = BA$.

Dit is enkel als A en B beide $(n \times n)$ -matrices $\overline{\text{zn}}$, anders kunnen we ze $\overline{\text{nt}}$. verm.

c) Als A en B inverteerbare matrices $\overline{\text{zn}}$, dan is ook

$A+B$ inverteerbaar:

Hfst. 1

38.

Bepaal LU-decompositie v.d. matrix

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ en los } AX = B \text{ op m.b.v. decompositie}$$

$$\text{met } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU \text{ met } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \text{ en } U = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

→ A in echelonvorm zetten zonder rijen te verw.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{LUX = B}$$

$$\times LY = B : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 - y_1 = 1 \\ y_3 - y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 3 \end{cases}$$

$$\times UX = Y : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 5 \\ x_1 = 6 \end{cases}$$

Hfst. 2

1. Bereken determinant via:
- ontw. naar rij/kolom
 - rijoperaties om bovensmatrix te verkrijgen

$$* A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

↳ det = product v. get. op diagonaal

$$\bullet \det(A_1) = ad - bc = 12 - (-10) = 22$$

$$\bullet \sim \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} \quad \det(A_1) = 1 \cdot 22 = 22$$

$3R_2 + 2R_1 \quad R_1/3$

$$* A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \det(A_6) = 1 \cdot (21 - 20) - 1 \cdot (14 - 4) + 3 \cdot (10 - 3) = 1 - 10 + 21 = 12$$

$$\bullet \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$R_2 - 2R_1 \quad R_3 - R_1 \quad R_3 - 4R_2$

$$\det(A_6) = 1 \cdot 1 \cdot 12 = 12$$

$$* A_8 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & -11 \\ 8 & 3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad \det(A_8) = 0$$

3. Vind alle opt. vld vgl. $\det(AB) = 0$ voor

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & 3x \\ 3 & x+2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 5 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 0$$

$$\Leftrightarrow ((x+2)^2 - 9x) \cdot x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4 - 9x) \cdot (x^2 + 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9x^3 + 2x^3 + 8x^2 + 8x - 18x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x \in \{-2, 0, 1, 4\}$$

4. $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ met rijen $\pi_i \in \mathbb{R}^3$ en $\det(A) = -6$

Bepaal $\det(A_1)$ met $A_1 = \begin{pmatrix} \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 1 keer v. rij wisselen, dus $\det(A_1) = -\det(A) = 6$

12. Schrijf $\det \begin{pmatrix} 1+x & 1+x+x^2 & 1+x+x^2+x^3 \\ 1+y & 1+y+y^2 & 1+y+y^2+y^3 \\ 1+z & 1+z+z^2 & 1+z+z^2+z^3 \end{pmatrix}$ als product v. zoveel

mogelijk fact:

$$\begin{aligned} \det &= (1+x) \cdot [(1+y+y^2)(1+z+z^2+z^3) - (1+y+y^2+y^3)(1+z+z^2)] \\ &\quad - (1+x+x^2) [(1+y)(1+z+z^2+z^3) - (1+y+y^2+y^3)(1+z)] \\ &\quad + (1+x+x^2+x^3) [(1+y)(1+z+z^2) - (1+y+y^2)(1+z)] \end{aligned}$$

28. Waar of niet waar? Toon aan / geef tegenvoorbeeld:

a) voor alle vierk. matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(A+B) = \det A + \det B$

Niet waar: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A) = -2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(B) = 2$

$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 6 \neq \det(A) + \det(B) = 0$

b) voor alle vierk. matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $\det(AB) = \det(BA)$

Waar: $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA)$
 commutatief

c) Als E el. matrix is, dan is $\det(E) = \pm 1$

Niet waar: $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ je mag rij verm. met const. uit $\mathbb{R}$

Dus $\det(E) = 2$

f) Er bestaat geen reële (3×3) -matrix A waarvoor geldt dat $A^2 = -I_3$

Een matrix tot het kwadraat kan niet neg. zijn, dus kan het nooit gelijk zijn aan $-I_3$

Fout

g) Zij A een nilpotente matrix ($A^k = 0$ voor $k \in \mathbb{N}$)
dan is $\det(A) = 0$

$$\text{Waar: } \det(A^k) = 0 \Rightarrow (\det(A))^k = 0 \\ \Rightarrow \det(A) = 0$$

h) Voor elke vierk. matrix A : $\det(kA) = k \cdot \det(A)$

$$\text{Fout: Neem } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } k=5$$

$$\text{Dan } \det(kA) = \det \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = 25$$

$$\text{Maar } k \cdot \det(A) = 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 = 5$$

en dus geldt de gelijkheid niet.

i) Multilineariteit geldt in 2 rijen tegelijk:

$$\det \begin{pmatrix} a+u & b+v & c+w \\ d+x & e+y & f+z \\ l & m & n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

$$\text{Fout: } \hookrightarrow = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+x & e+y & f+z \\ l & m & n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ d+x & e+y & f+z \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ l & m & n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

$$+ \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ d & e & f \\ l & m & n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ l & m & n \end{pmatrix}$$

j) Voor $(n \times 1)$ -kolomvect. u en v met $n \geq 2$ geldt dat $\det(uv^T) = 0$

$$\text{Waar: } \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \dots & u_1 v_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n v_1 & \dots & u_n v_n \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ twee n -rijen zijn altijd veelvoud v. elkaar

$$\Rightarrow \det(uv^T) = 0$$

k) Een vierk. stelsel $AX = B$ heeft e. opl. als $\det(A) \neq 0$

Fout, als $\det(A) = 0$, dan kunnen er oneindig veel opl. zijn.

25. Geef op: v. volgend stelsel m.b.v. methode v. Cramer

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$\times \det(A) \stackrel{?}{\neq} 0 : \det(A) = 3(1+1) + 1(4-2) + 1(-4-2) \\ = 6 + 2 - 6 = 2 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \times A^{-1} = ? & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_1 \cdot 3 \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & | & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & | & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & | & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & | & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_2 \cdot \frac{3}{7} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & | & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & | & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \cdot 3 \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & | & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & | & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{7} & | & \frac{6}{7} & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & | & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{35}{12} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad R_1 + \frac{1}{3}R_2 \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{35}{12} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad R_2 - \frac{2}{7}R_3 \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{35}{12} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad R_2 + \frac{1}{7}R_3 \end{aligned}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{35}{12} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{5}{12} \\ -\frac{23}{12} \end{pmatrix}$$

REKENFOUT : juiste antw : $\begin{pmatrix} 2 \\ -3/2 \\ -11/2 \end{pmatrix}$
 $\hookrightarrow$ zie weder $\checkmark$

28

l) als A vierk matrix met $\det(A) = 1$, dan is

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = A$$

→ waar

$$\text{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$\text{adj}(A^{-1}) = A \cdot \det(A^{-1}) = A \cdot (\det(A))^{-1} = A$$

24. Toon aan dat voor inverteerbare matrices A en B geldt:

a) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \cdot \text{adj}(A)$

$$\times \text{adj}(AB) = \det(AB) (AB)^{-1}$$

$$\times \text{adj}(B) = \det(B) B^{-1}$$

$$\text{adj}(A) = \det(A) A^{-1}$$

$$\text{en } \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\Rightarrow \text{adj}(AB) = \text{adj}(A) \cdot \text{adj}(B)$$

b) $\text{adj}(Q A Q^{-1}) = Q \text{adj}(A) Q^{-1}$ voor elke inverteerbare matrix Q

$$\text{adj}(Q A Q^{-1}) = \det(Q A Q^{-1}) (Q A Q^{-1})^{-1}$$

$$= \det Q \det A \det Q^{-1} (Q A Q^{-1})^{-1}$$

$$= \det Q \det A (\det Q)^{-1} Q (Q A)^{-1}$$

$$= \det A \cdot Q \cdot A^{-1} Q^{-1} = Q \text{adj}(A) Q^{-1}$$

c) $AB = BA \Rightarrow \text{adj}(A) B = B \text{adj}(A)$

$$AB = BA \Leftrightarrow A B A^{-1} = B A A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A B A^{-1} = B$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} A B A^{-1} = A^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow B A^{-1} = A^{-1} B$$

$$\Leftrightarrow \frac{B \text{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{\text{adj}(A) B}{\det(A)}$$

25.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \cdot B$$

$$\times \det(A) = 2$$

$$\times \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\times \text{adj}(A) \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\times X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ -11/2 \end{pmatrix}$$

29. Toon aan dat $\det(P) = \det(A) \cdot \det(B)$

$$\times k=1: P = \begin{pmatrix} a_{11} & c \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \det(P) = \det(a_{11} B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

 $\times P_{ij} = P$ zonder rij i en zonder kolom j (p. 70)

$$\det(P) = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}k} x_{i,j} (-1)^{(i+j)} \det(P_{i,j})$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}k} x_{i,j} (-1)^{(i+j)} \det(A_{i,j}) \det(B)$$

$$= \det(B) \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}k} x_{i,j} (-1)^{(i+j)} \det(A_{i,j}) = \det(B) \cdot \det(A)$$

def. 2

$$f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$\lambda \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \lambda f(x)$$

① Toon aan dat opt. associatief is

onderscheid tussen $+$ en $+$

$$(f + g) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$

$$f + (g + h)(x) = f(x) + g(x) + h(x)$$

② Wat is neutraal el.? + Toon aan

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

$$(0 + f)(x) = 0(x) + f(x) = f(x)$$

$$0(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x : 0(x) = 0$$

③ Neem $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wat is zn. tegeng. el.?

$$(g + (-g))(x) = g(x) + (-g)(x) = 0(x)$$

$$(-g)(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \forall x : (-g)(x) = -1 \cdot g(x)$$

④ Toon aan dat distributiviteit geldt

$$\lambda(f + g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$(\lambda(f + g))(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

opdracht 3.9 Toon aan : in vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$ geldt, voor alle

vect. $v \in V$ en alle $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ of $v = 0$

$$\times \lambda = 0 : \lambda \cdot v = 0 \cdot v = 0$$

$$\times \lambda \neq 0 : \lambda v = 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda v}{\lambda} = \frac{0}{\lambda} \Leftrightarrow 1 \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Lineaire week 6 : Oefenzitting 28-3

3.2 Welke v. volgende verz. z'n. deelruimten vld geg. vectorruimte? Leg uit:

deelverz. $\Leftrightarrow$ ① $W \neq \emptyset$

② $x+y \in U$

③ $\lambda x \in U$

* $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

① $W_2 \neq \emptyset$

② $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$\rightarrow (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \stackrel{?}{=} (z_1 + z_2)^2$

$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$

$\Rightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = z_1z_2$

stel $x_1 = 1 \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 1 \quad \Rightarrow 0 + 0 \neq 1$, dus

$x_2 = 0 \quad y_2 = 1 \quad z_2 = 1 \quad \text{gr. deelruimte}$

* $W_5 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \det(A) \neq 0\} \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$\det(0) = 0$, maar 0 gr. el. v. vectorruimte

* $W_6 = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A \text{ is symm}\} \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$

① $W_6 \neq \emptyset$

② $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & a_1 & d_1 \\ c_1 & d_1 & a_1 \end{pmatrix}$ en $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & a_2 & d_2 \\ c_2 & d_2 & a_2 \end{pmatrix}$ beide symm.

$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 & d_1 + d_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ ook symm.

③ $\lambda A_1 = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ \lambda b_1 & \lambda a_1 & \lambda d_1 \\ \lambda c_1 & \lambda d_1 & \lambda a_1 \end{pmatrix}$ is symm

$\Rightarrow W_6 \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$

3.5 Zij U en W deelruimten v. vectorruimte V .

Toon aan dat $(U+W) \subset V \Leftrightarrow U \subset W$ of $W \subset U$

$\Rightarrow$ geg. is dat $(U+W) \subset V$

We moeten bew. dat $U \subset W$ of $W \subset U$

Neem $u \in U$ en $w \in W$, dan zn. er 3 opties:

* $u+w \in U$, aangezien u en w will. gekozen zn.: $W \subset U$

* $u+w \in W$, " " $U \subset W$

* $u+w \notin U \wedge u+w \notin W$, dit betekent dat $U+W$ gr. ruimte meer bestaat

Dus $U \subset W$ of $W \subset U$

$\Leftarrow$ geg. dat $U \subset W$ of $W \subset U$, dan bew. dat $(U+W) \subset V$
idem

3.6 Behoort $(3, -1, 0, -1)$ tot deelruimte v. $\mathbb{R}^4$ opgespannen door $(2, -1, 3, 2)$, $(-1, 1, 1, -3)$ en $(1, 1, 9, -5)$?

$\rightarrow$ wrij?

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

We hebben e nulrij, dus vector is lin. afh. en dus behoort ze tot deelruimte

3.7

Schrijf $p(x) = -1 - 3x + 3x^2$ als lin. comb. v.d. veeltermen

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^2$$

$$p_2(x) = 2 + 5x$$

$$p_3(x) = 3 + 8x - 2x^2$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{in matrixvorm: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$p(x) = -1p_1(x) + 3p_2(x) + 2p_3(x)$$

3.9 Welke v.d. volgende verz.: vect.: zn. vrij?

a) $\{(1, 2, 0); (2, -1, 1); (1, 7, -1)\}$ in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2/5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Door R_2 bij R_3 op te tellen, bekomen we de nulrij, dus nt. vrij!b) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

Vrij!

c) $\{x^3 + 2x^2, -x^2 + 3x + 1, -x^2 + 2x - 1\}$ in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ nt. vrij! }$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3/5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{Dus vrij?}$$

$R_1 - \frac{1}{5}R_3$
 $R_2 + \frac{2}{5}R_3$

3.13 Zij $\{e_1, \dots, e_n\}$ basis v.v. Is $\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1\}$ vrij deel?

Neem $n=3$:

$$e_1 - e_2 + e_2 - e_3 + e_3 - e_1 = 0$$

$$\Rightarrow -1(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_3 - e_1$$

Dus m.a.w. $-1(w_1 + w_2) = w_3$ dus is w_3 c. lin comb.
en dus nt. vrij.

3.28 Beschouw vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n}, +)$ deelruimte U vld symm. matrices en deelruimte W vld scheefsymm. matrices

Bewijs: $\mathbb{R}^{n \times n} = U \oplus W$

* symm. matrix: $A = A^T$

scheefsymm: $A = -A^T$

* Neem will $A \in U$ en $B \in W$: $A = A^T$ en $B = -B^T$

Dan moeten we bew. dat $A+B = C$ met $C \in V$

① $C^T = A^T + B^T = A - B$

② $C + C^T = A + B + A - B = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}(C + C^T)$

③ $C - C^T = A + B - (A - B) = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}(C - C^T)$

③ $A + B = \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{2}(C - C^T) = C$

Lineaire Week 7: Oefenzitting 4-10 november

3.21 Zij $v \in \mathbb{R}^4$ vector met $\text{coö} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ t.o.v. standaardbasis. Bep. $\text{coö} =$ van v t.o.v. nieuwe basis $\{(1, 1, 1, 1); (0, 1, 1, 1); (0, 0, 1, 1); (0, 0, 0, 1)\} = \beta_2$

$\nabla \beta_2$. nieuwe $\text{coö} =$ = oude $\text{coö} = \nabla$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = a_1 \\ b_2 = a_2 - a_1 \\ b_3 = a_3 - a_2 \\ b_4 = a_4 - a_3 \end{cases} \quad \text{coö}_{\beta_2}(v) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3)$$

3.22 Bepaal basis en dimensie v. vectorruimte:

a) $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$

$x + z = y$, dus y -waarde volledig bep. door x en z

Dus $\dim(W_1) = 2$

$$\beta = \{(1, -1, 0); (0, -1, 1)\}$$

b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \text{ en } 2x + y + z = 0\}$

x lin. afh. controleren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(W_2) = 2$$

$$\beta = \{(1, 0, 1); (0, 1, -1)\}$$

MAAR in ope: $\dim 1$ en $\beta = \{(1, -1, 1)\}$

3.27

Vind ^{voor} de deelruimte W in V een complementaire deelruimte U in V , m.a.w. deelruimte U zodat $U \oplus W = V$.

$$a) W = \text{vect}\{(1, 6, 4), (2, 4, -1)\}$$

$$\Rightarrow V = U + W$$

$$v = (1, 2, 5) \text{ en } w = (1, -2, -5) \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{en } U \cap W = \{\emptyset\}$$

* basis W :

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \quad R_2 - 2R_1$$

$$* \text{ basis } U = \{(0, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

3.29 even func. $f(-x) = f(x)$
 oneven " $f(-x) = -f(x)$

b) Bewijs dat oneven func. e. compl. deelruimte
 vormen v.d. even func.

Tip: $f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{\text{even}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{oneven}}$

* $\rightarrow$ elke func. kan geschreven w. als som v.d.
 even en oneven func.

Dus $f(x) = U + W$

* $U \cap W = \{0\}$, want e. func. kan n.t., en even en
 oneven z.n., behalve als $f(x) = 0$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= f(-x) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = 0$$

Endus vormen de oneven func. e. compl. deelruimte
 v.d. even func. vanuit def. v. directe som

3.32 Waar of fout? Bewijs/tegenw:

a) Als α en β vrije delen z.n. v. V , dan is unie $\alpha \cup \beta$
 ook vrij

Fout

$\rightarrow$ fout: Neem $\alpha = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$

$$\beta = \{(0, 0, 1); (0, 1, 0)\}$$

$$\alpha \cup \beta = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$$

dus n.t. vrij

b) Als U en W deelruimten z.n. v. V en α is basis v. U
 en β is basis v. W , dan is $\alpha \cap \beta$ basis voor $U \cap W$

Fout

Neem $\alpha = \{(0, 1, 0)\}$ en $\beta = \{(0, 2, 0)\}$

$$\text{Dan is } U \cap W = \text{v.d.} \{(0, 1, 0)\} \cap \text{v.d.} \{(0, 2, 0)\} = \text{v.d.} \{(0, 1, 0)\}$$

$$\text{en } \alpha \cap \beta = \{(0, 1, 0)\} \cap \{(0, 2, 0)\} = \{\emptyset\}$$

en dus vormt $\alpha \cap \beta$ gn. basis voor $U \cap W$

c) Als U deelruimte is v.v. en $v, w \in V$ zodat $v+w \in U$, dan is $v \in U$ en $w \in U$

Fout

→ fout: Neem $v = (1, 0, 0)$ en $w = (-1, 0, 0)$

en $U = \text{vect}\{(0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$

Dan behoren v en w n.t. tot U , maar

som wel, want oorsprong behoort tot U

d) Zij V n -dim. vectorruimte, $U_i \subset V$ voor $i = 1, 2, \dots, r$ zodat $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_r$

Als $r > n+1$, dan bestaat er e. $i < r$ waarvoor $U_i = U_{i+1}$

$\left. \begin{array}{l} r > n+1 \\ i < r \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \leq n+1, \text{ want } \dim V = n \text{ en } U_i \subset V \\ \text{dus } \dim U_i \leq \dim V \end{array}$

Lineaire week 8 : oefenzitting 11-17 november

3.17 geg. vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$ en beschouw

$U = \text{vect}\{(4, 4, -4), (1, -1, 2), (3, 1, 0)\}$. Zoek $\dim$ v. U en bep. basis voor U .

+ Behoren vect. $(1, 0, 0)$ en $(-4, -10, 13)$ tot U ?

indien ja, geef coö. v. deze vect. t.o.v. zelfgekozen basis

$$\ast \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Dus $\beta = \{(1, 1, -1), (3, 1, 0)\}$ en $\dim U = 2$

$\ast (1, 0, 0) \notin U$

$$\begin{aligned} \ast (-4, -10, 13) &= \lambda_1 (1, 1, -1) + \lambda_2 (3, 1, 0) \\ &= -13(1, 1, -1) + 3(3, 1, 0) \end{aligned}$$

3.19 a) Een verz. vect. = $\{(1,2,3); (1,2,0); (1,1,1); (1,1,0); (4,5,6)\}$
in $\mathbb{R}^3$ uit tot basis v. deelruimte die ze voortbrengt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1, R_3-R_1, R_4-R_1, R_5-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \{(1,2,3); (1,2,0); (1,1,1)\}$$

b) Vul verz. matrices aan tot basis v. $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.24 $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ Vind basis voor rijruimte, kolomruimte en nulruimte

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voor rijruimte: $\beta_1 = \{(1,1,1); (0,0,1); (0,1,0)\}$

Voor kolomruimte: $\beta_2 = \{(1,1,1,1); (1,1,-1,-1); (1,-1,1,-1)\}$

Voor nulruimte: $Av = 0$ en v is nulruimte

$$\beta_3 = \emptyset$$

3.25

$$V = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + u = 0\}$$

$$W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0, z = 2u\}$$

deelruimten v. $\mathbb{R}^4$

Vind basis voor $V, W, V+W, V \cap W$

* β_V

$$y + z + u = 0 \Rightarrow u = -y - z \quad \text{Dus} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -y-z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_V = \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, -1); (0, 0, 1, -1)\}$$

* β_W

$$\begin{cases} x + y = 0 \Rightarrow x = -y \\ z = 2u \Rightarrow u = \frac{z}{2} \end{cases} \quad \text{Dus} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ z \\ z/2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\beta_W = \{(-1, 1, 0, 0); (0, 0, 1, \frac{1}{2})\}$$

?

* β_{V+W}

~~$$\begin{cases} y + z + u = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -y - z \\ x = -y \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -y - 2u \\ x = -y \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{y}{3} \\ x = -y \\ z = -\frac{2y}{3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \beta_{V+W} = \{(-1, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})\}$$~~

$\beta_V, \beta_W, \beta_{V \cap W}$

$\beta_{V \cap W} = \{(1, 0, 0, 0); (0, 1, 0, -1); (0, 0, 1, -1); (-1, 1, 0, 0)\}$

* $\beta_{V \cap W}$

$$\begin{cases} y + z + u = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z + u = x + y \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + u = x \\ z = 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3u \\ z = 2u \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u \\ -3u \\ 2u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \beta_{V \cap W} = \{(3, -3, 2, 1)\}$$

3.35

$$U_a = \text{vect}\{(4+a, 2, 0, -2); (3, a-1, 0, -1)\}$$

$$V_a = \text{vect}\{(3, 5, a+1, -5); (0, 10+a, 0, 0)\}$$

deelruimten v. vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +)$, $a \in \mathbb{R}$

Bepaal basis en dimensie v. $U_a \cap V_a$

$$\begin{pmatrix} 4+a & 2 & 0 & -2 \\ 3 & a-1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & a+1 & -5 \\ 0 & 10+a & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & a-1 & 0 & -1 \\ 0 & 10+a & 0 & 0 \\ 4+a & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & a+1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{a-1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 10+a & 0 & 0 \\ 0 & -a^2-4a+10 & 0 & 2+a \\ 0 & 6-a & a+1 & -4 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Neem } a=1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 a) Is volgende afb. lineair?

$$\times L_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto |x - y|$$

$$\times (1, 2) + (1, 2) \mapsto |1-2| + |1-2|$$

$$\Rightarrow (2, 4) \mapsto |-1| + |-1| = |-2| \in \mathbb{R}$$

$$\times 2(1, 2) \mapsto 2|1-2|$$

$$\Rightarrow (2, 4) \mapsto 2|-1| \in \mathbb{R}$$

} dus lin.

$$\times L_5: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2: (x, y, z) \mapsto (3y+z, x-y-z)$$

$$\times (1, 1, 1) \mapsto (3+1, 1-1-1) = (4, -1) \in \mathbb{R}^2$$

$$\times 2(1, 1, 1) \mapsto 2(4, -1) = (8, -2) \in \mathbb{R}^2$$

} dus lin.

4.5 Bepalen volgende voorschriften unieke lin. afb.:

zo ja, geef expliciet functievoorschrift

$$\times L_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ met } L_1(1, 2) = (0, -1)$$

$$L_1(-1, -1) = (2, 1)$$

$$L(0, 1) = (2, 0), \text{ dus } L_1(x, y) = (0, -x)$$

$$L(x, y) = (2y, x)$$

$$L_1(x, y) = (y-x, -x)$$

$$L(x, y) = (2y-4x, -x)$$

$$\times L_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \text{ met } L_2(1, 0, 0) = 1+3X^2$$

$$L_2(0, 0, 1) = -5+4X^2$$

$$L_2(0, 1, 0) = 4-7X$$

$$L_2(a, b, c) = (1+3X^2)a + (4-7X)b + (-5+4X^2)c$$

$$= (a+4b-5c) - 7bX + (3a+4c)X^2$$

$$\times L_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \text{ met } L_3(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3(2, 1, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3(4, 5, 6) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

geen unieke afbeelding want $(4, 5, 6)$ is lin. comb. v. $(1, 2, 3)$ en $(2, 1, 0)$

4.7

Beschouw lin. transformatie

$$T: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}: f \mapsto f'' - 4f' + f$$

Vind matrix T_α^α met $\alpha = \{X, 1+X, X+X^2, X^3\}$

$$\ast T(X) = X'' - 4X' + X = 0 - 4 + X = -4 + X$$

$$\text{co}_\alpha(X-4) = (5, -4, 0, 0) \quad \text{co}_\alpha(X-4) \text{ schrijven als lin. comb. v. } \alpha$$

$$\ast T(1+X) = 0 - 4(1+X)' + 1+X = X - 3$$

$$\text{co}_\alpha(X-3) = (4, -3, 0, 0)$$

$$\ast T(X+X^2) = 2 - 4(X+X^2)' + X+X^2 = 2 - 4 - 8X + X + X^2 = X^2 - 7X - 2$$

$$\text{co}_\alpha(X^2 - 7X - 2) = (-6, -2, 1, 0)$$

$$\ast T(X^3) = 6X - 12X^2 + X^3$$

$$\text{co}_\alpha(6X - 12X^2 + X^3) = (18, 0, -12, 1)$$

Dus kunnen we nu m.b.v. co_α matrix T_α^α schrijven

$$T_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -6 & 18 \\ -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $L(X) \quad L(1+X) \quad L(X+X^2) \quad L(X^3)$

4.6

Bepaal matrices v. basisverandering w. α naar β

$$a) \alpha = \{(5, 1), (1, 2)\} \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

$$\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$\text{Id}_\beta^\alpha = P = Q^{-1}$$

$$\ast Q = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Id}_\alpha^\beta$$

$$\alpha \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & -1/9 & 5/9 \end{array} \right), \text{ dus } \begin{pmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \text{Id}_\beta^\alpha$$

$$c) \alpha = \{3+2x+x^2, 4-x^2, 2+x\} \text{ in } \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

$$\beta = \{x^2, x, 1\}$$

$$\Rightarrow \alpha = \{(3, 2, 1), (4, 0, -1), (2, 1, 0)\}$$

$$\beta = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -5/2 & 1 & -7/2 & 1/2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 7/5 & -1/5 \end{array} \right) \\ R_1 + R_2 \\ R_3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \\ R_3 - 7R_2 \end{array}$$

$\sim$ REKENFOUW

4.8

 $\alpha = \text{standaardbasis v. } \mathbb{R}^3 = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ $\beta = \{(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$ Beschouw lin. afb. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedef. door

$$T(x, y, z) = (x+2y+z, -y, x+4z)$$

a) Bereken matrices v. basisverandering v. α naar β en v. β naar α geve: $\text{Id}_{\beta}^{\alpha}$ en $\text{Id}_{\alpha}^{\beta}$

$$\times \text{Id}_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \text{Id}_{\beta}^{\alpha} = (\text{Id}_{\alpha}^{\beta})^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ R_1 - R_2 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ R_2 - R_3 \\ \end{matrix} \quad \text{Dus } \text{Id}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bepaal matrixvoorstellingen T_{α}^{α} en T_{β}^{β}

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{aflezen uit } T(x, y, z) =$$

$$T_{\beta}^{\beta} = \text{Id}_{\alpha}^{\beta} T_{\alpha}^{\alpha} \text{Id}_{\beta}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

4.23

$\Rightarrow = \dim \text{rijrang} = \dim \text{kolomrang}$
 Bepaal rang v. A i.f.v. x

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 8 \\ 3 & 3 & -9 & 8 \\ 1 & 1 & x & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -9 & 8 \\ 2 & 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & x+3 & 0 \end{pmatrix} \\ R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Rang}(A) = 3 \Leftrightarrow x \neq -3 \\ \text{Rang}(A) = 2 \Leftrightarrow x = -3 \end{array}$$

Oefenzitting 25 nov - 1 dec:

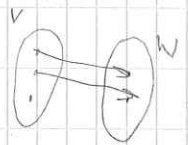
4.4

Zij $L: V \rightarrow W$ lin. afb. met $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ en $\dim_{\mathbb{R}} W = m$
 Toon volgende uitspraken aan:

a) als $n > m$, dan is L nt. injectief

injectief, dus elk el. in V $\bar{\omega}$ afg. op een el. in W

Hier nt inj., dus nt. alle el. in V $\bar{\omega}$ afgebeeld
 op hoogstens 1 bld.



Toon aan:

Neem basis $\beta_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ v. V en $\beta_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ v. W

Omdat $n > m$, bevat β_V meer vect. dan β_W en

dus kunnen nt. alle el. in β_V of lin. comb. afgebeeld

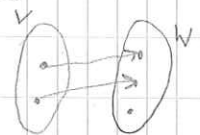
$\bar{\omega}$ op el. 1 lin. comb. vld vect. in β_W (op hoogstens 1 bld)

en dus is L nt. injectief

b) als $n < m$, dan is L nt. surjectief

surj: elk el. in V $\bar{\omega}$ afgeb. op el. in W en elke

el. in W kunnen we minstens 1 keer verbinden met pijl



Toon aan:

Neem weer β_V en β_W . Nu is $n < m$ en dus bevat β_V minder el.

dan β_W en dus kunnen nt. alle lin. comb. v. β_W als afb.

dienen

4.14 Beschouw lin. afb. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met matrixvoorstelling
 $L_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ t.o.v. basissen $\alpha = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$
 en $\beta = \{(1,0); (1,1)\}$

a) Bepaal basis en dim v. $\ker(L)$ en $\text{Im}(L)$

$$\ker(L) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid L(v) = 0\}$$

$$\text{Im}(L) = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid \exists v \in \mathbb{R}^3 : L(v) = w\}$$

* standaardbasis v. $\mathbb{R}^3$ $\alpha' = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

$$L_{\alpha'}^{\beta} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ met } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ coo} = \text{t.o.v. } \alpha'$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+2b+c \\ b+3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3c \\ a = \frac{5c}{4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Neem } c = t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{4}t \\ b = -3t \\ c = t \end{cases}$$

$$N(L_{\alpha}^{\beta}) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{4}t \\ -3t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{neem } t=4$$

dan is $\{(5, -12, 4)\}$ basis voor $N(L_{\alpha}^{\beta})$

$\text{Id}_{\alpha}^{\beta} = Q$ met als kolommen de basisvect. v. α
 uitgedrukt t.o.v. β

$$\Rightarrow \text{Id}_{\alpha}^{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Id}_{\alpha}^{\beta} \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{Dus } \{(-3, -8, 4)\} \text{ is basis voor } \ker(L_{\alpha}^{\beta})$$

met $\dim(\ker L) = 1$

* Breid $\{(-3, -8, 4)\}$ uit tot basis voor $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,0); (0,1,0); (-3,-8,4)\}$$

$$\begin{array}{l} * L(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} * \\ * \end{array}} \right\} \text{ want } \dim(\text{Im } L) = 2$$

* $\text{Id}_{\beta}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ met α' standaardbasis

$$\text{Id}_{\beta}^{\alpha'} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \text{Id}_{\beta}^{\alpha'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus $\{(4,0); (3,1)\}$ is basis voor $\text{Im}(L_{\alpha}^{\beta})$ met $\dim 2$

4.17

Zij $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e. lin. afb. met matrix $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$
t.o.v. standaardbasis

Zoek basissen α van $\mathbb{R}^2$ en β van $\mathbb{R}^3$ zodat

L_α^B e. matrix is vld vorm $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (met $r = \text{rang vld lin. afb.}$)

$$\alpha_s = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$$\beta_s = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

gevl: $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$

$$\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

$$* \ker(L_\alpha^B) = N(L_\alpha^B)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \sim (2, -3)$$

Dus $\{(2, -3)\}$ is basis van $\ker(L_\alpha^B)$

* $\hookrightarrow$ uitbreiden tot basis voor $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = (1, 0) \quad \text{dus } \alpha = \{(1, 0), (2, -3)\}$$

* Nu bepalen we het beeld van v_1

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Uitbreiden tot basis voor $\mathbb{R}^3$:

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 6, 9)\}$$

4.20

Zij $L: V \rightarrow W$ e. lin. afb. Bewijs:

a) Als A deelruimte is v. V , dan is $L(A) = \{L(w) \mid w \in A\}$
een deelruimte v. W

Neem basis v. A : $\alpha' = \{v_1, \dots, v_n\}$

basis v. V : $\alpha = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$

basis v. W : $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$

We weten dat $\beta = L(\alpha) = \{L(v_1), \dots, L(v_{n+m})\}$

Neem dan basis v. $L(A)$: $\gamma = \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$

Aangezien $\gamma \subseteq \beta$, geldt dat $L(A) \subseteq W$

4.21 Waar of nt. waar, bewijs / tegenvb:

- a) Zij V en W eindigdim. vectorruimten en $L: V \rightarrow W$ lin. afb. Dan bestaat er e. deelruimte U v. V zodat $\ker(L) \cap U = \{0\}$ en
- $$\operatorname{Im}(L) = \{L(u) \mid u \in U\}$$

Oefenzitting 2-8 december

X 5.1

a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ idempotent ($A^2 = A$)

Bepaal eigenw. v. A

Zij v eigenw. van A : $Av = \lambda v$

$$A^2 = A, \text{ dus } A^2 v = \lambda v \Rightarrow A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v \\ \Rightarrow \lambda v = \lambda^2 v \Rightarrow (1 - \lambda^2)v = 0$$

v is eigenw. en kan dus n.t. nul z'n.

$$\Rightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ of } \lambda = 1$$

b) Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n.t.-sing. ($\det(A) \neq 0$). Bepaal eigenw. v. A^{-1}
in termen v. A $\hookrightarrow$ dus A^{-1} bestaat

$$A^{-1} v = \lambda v$$

$$A \cdot A^{-1} v = A \cdot \lambda v$$

$$\Rightarrow I_n v = \lambda Av$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\lambda}$$

Dus λ is eigenw. v. A^{-1}

$\frac{1}{\lambda}$ " " v. A

5.4

Bepaal eigenw. en bijhorende eigenruimten v. matrix

Diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}/\mathbb{C}$?

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* diagbaar $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3$ basis heeft die volledig uit eigenvect. v. A bestaat $\rightarrow$ hier: n! diag.

* eigenw. zoeken: $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

in de juiste xx

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)((2-\lambda)(-1-\lambda)) + 2(0 - 2(2-\lambda)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2) + 2(-4+2\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6 - 3\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 4\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 14 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 4 & 3 & -14 \\ & \vdots & & & \\ 2 & & -2 & 4 & -14 \\ \hline & -1 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 7 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} -2 & -8+16-6-14 \neq 0 \\ \lambda_1 = 2 & -8+16+6-14 = 0 \end{array}$$

$\uparrow$ rekenfout, dus $\lambda_2 = 1$

$$\text{Spec}(A_3) = \{2, 1\}$$

* eigenvect. zoeken:

$$\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Eigenruimtes: $E_1 = \text{vect}\{(0, 1, 0)\}$ en $E_2 = \text{vect}\{(-1, 0, 1)\}$

5.6

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\rightarrow \det(A) = 0$ a) Toon aan dat A singulier is $\Leftrightarrow 0$ eigenw. is v. A $\Rightarrow A$ is singulier, dus A is $\mathbb{R}$ -inverteerbaarDus rijen/kolommen $\vec{z}_i$ $\mathbb{R}$ -allemaal lin. afh.en dus $\vec{z}_i$ $\mathbb{R}$ -alle eigenw. = versch. v. 0 $\Leftarrow 0$ is eigenw. v. A , dus alle rijen/kolommen $\vec{z}_i$ $\mathbb{R}$ -allemaal lin. onafh. en dus is A sing.b) Wat is E_0 precies (als A singulier is)? E_0 is ruimte opgespannen door eigenvect. met eigenw. 0 . Deze eigenvect. is een $\mathbb{R}$ -nulvect. uit nulruimte v. A

5.8

Bekijk lin. transf. $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met eigenw. $-1, 0, 1$ en bijhorende resp. eigenvect. v_1, v_2, v_3 Bepaal $\ker(L)$ en $\text{Im}(L)$ $\rightarrow$ eigenvect. met eigenw. 0 $\vec{z}_i$ $\mathbb{R}$ -nulvect. uit $\ker(L)$ Dus v_2 behoort tot $\ker(L)$ $\rightarrow L$ bevat 3 eigenw. (versch.) en $\dim(V) = 3$ en $\dim(\ker L) = 1$ dus $\dim(\text{Im} L) = 2$ en verz. eigenvect. $\vec{z}_i$ onderling lin. onafh., dus v_1 en v_3 vormen $\text{Im}(L)$ Dus $\ker(L) = \text{vect}\{v_2\}$ $\text{Im}(L) = \text{vect}\{v_1, v_3\}$

5.10

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ 3D vectorruimte over $\mathbb{R}$ en $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ basis voor V . Beschouw lin. transf. $T: V \rightarrow V$ gedef. door

$$T(v_1) = 5v_1 + 2v_2 + 3v_3$$

$$T(v_2) = 2v_1 - v_2$$

$$T(v_3) = 3v_1 + v_3$$

a) Bereken eigenw. v. T

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) - 2(2(1-\lambda)) + 3(-3(-1-\lambda)) = 0$$

$$\Rightarrow (-5+\lambda-5\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) - (4-4\lambda) + 3(3+3\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow -5-4\lambda+\lambda^2+5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3-4+4\lambda+9+9\lambda=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3+5\lambda^2+14\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda(-\lambda^2+5\lambda+14)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0 \quad \text{of} \quad -\lambda^2+5\lambda+14=0 \quad D=95+4 \cdot 14=81$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{-5+9}{-2} = -2$$

$$\lambda_3 = \frac{-5-9}{-2} = 7$$

$$\text{Spec}(T) = \{0, -2, 7\}$$

b) Bereken eigenruimte v. T bij elke eigenw.:

* eigenw.:

$$\boxed{\lambda_1=0} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$E_0 = \text{vect}\{v_1+v_2-3v_3\}$$

$$\boxed{\lambda_2=-2} \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-2} = \text{vect}\{v_1-2v_2-v_3\}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 7} \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7 = \text{vect} \{ 4v_1 + v_2 + 2v_3 \}$$

c) Bestaat er e. basis $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ v. eigenvect. voor T ?

Ja, want versch. eigenw. en $\text{Spec}(T) = \dim T$

d) Zo ja, wat is de matrix v. T t.o.v. β ?

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

e) Vind de matrix v. basisverandering P van β naar α

$P = \text{Id}_\beta^\alpha = \text{kolommen de vect. v. } \beta$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

5.13

Zij $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ basis voor vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +)$

en zij $T_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lin. transf. geg. door

$$T_k(v_1) = v_1 + (1-k)v_2 + (k-1)v_3$$

$$T_k(v_2) = 2v_1 + 3v_2 - 4v_3$$

$$T_k(v_3) = 2v_1 + (3-k)v_2 + (k-4)v_3$$

a) Bep. voor elke parameter $k \in \mathbb{R}$ de eigenw. en eigenruimten

v. T_k

$$\begin{aligned} T_k &= \begin{pmatrix} 1 & 1-k & k-1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3-k & k-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-k & k-1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1-k & k-1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1-k & k-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-k & k-1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)((1-\lambda)(-2-\lambda)-1) - (1-k)(-2-\lambda) + (k-1) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-2-\lambda+2\lambda+\lambda^2-1) - (-2-\lambda+2k+k\lambda) + k-1 = 0$$

$$\Rightarrow -2+\lambda+\lambda^2-1+2\lambda-\lambda^2-\lambda^3+\lambda+2+\lambda-2k-k\lambda+k-1=0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + (5-k)\lambda - 2-k = 0$$

$$\text{Spec}(T_k) = \{-1, 1, k\}$$

ergens rekenfout?

$$* \boxed{k=-1} \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow \lambda=1$$

$$* \boxed{k=1} \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow \lambda=1$$

$$* \boxed{k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}} \rightarrow \lambda=-1 \rightarrow \lambda=1 \rightarrow \lambda=k$$

b) Voor welke waarden v. k is T_k diagonaliseerbaar?

* $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ diag: , want 3 versch. eigenw.
met multipl. 1

* $k=1$ diag: $m(1)=2$ en $d(1)=2 \Rightarrow m(1)=d(1)$

* $k=-1$ nt. diag: $m(-1)=2$ en $d(-1)=1$

$$\rightarrow m(\lambda) = \# \text{ keer nulp. in } \varphi$$

$$d(\lambda) = \dim E_\lambda$$

c) Zij $(T_k)_\alpha^\alpha$ matrixvoorstelling v. T_k t.o.v. basis α en stel dat T_k diag. is (over $\mathbb{R}$). Geef diagonaalmatrix D_k die gelijkv. is met $(T_k)_\alpha^\alpha$ en e. inverteerbare matrix P_k die $(T_k)_\alpha^\alpha$ herleidt tot deze diagonaalmatrix.

$$D_k = \text{Id}_\alpha^\beta (T_k)_\alpha^\alpha \text{Id}_\beta^\alpha \quad \text{met } \beta \text{ basis v. eigenw.}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = (\text{Id}_\beta^\alpha)^{-1} (T_k)_\alpha^\alpha \text{Id}_\alpha^\beta \Rightarrow \text{Id}_\beta^\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-k & k-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3-k & k-4 \end{pmatrix} \text{Id}_\alpha^\beta$$

$$P_k = \text{Id}_\beta^\alpha = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -k-3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.16 Zij $N, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ met $P \neq 0$. Bewijs indien $P = NP$, dan heeft N een eigenvuimte die minstens $\text{rang}(P) - \dim$ is

T.B: $\exists \lambda : \dim(E_\lambda) \geq \text{rang}(P)$

Neem $X \in \mathbb{R}^n$ will., dan $PX = N PX$

Dus PX is eigenvect. v. N (met eigenw. 1)

als $PX \neq 0$

Dus $\dim(E_1) \geq \text{rang}(P)$

5.18 Beschouw voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ de matrix

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} -b & 1 & b \\ 2a & 0 & -a \\ -2b & 1 & 2b \end{pmatrix} \quad \text{Toon aan dat } (1, 0, 2) \text{ eigenvect. is v. } T_{a,b} \text{ voor alle waarden v. } a \text{ en } b$$

Voor welke waarden v. a en b is $T_{a,b}$ diag. over $\mathbb{R}$?

* eigenw. berekenen:

$$\begin{vmatrix} -b-\lambda & 1 & b \\ 2a & -\lambda & -a \\ -2b & 1 & 2b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-b-\lambda) [(-\lambda)(2b-\lambda) + a] - [2a(2b-\lambda) - (-2b)(-a)] + b[2a - (-\lambda)(-2b)] = 0$$

$$\Rightarrow (-b-\lambda)(-2b\lambda + \lambda^2 + a) - (4ab - 2a\lambda - 2ab) + b(2a - 2b\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow 2b^2\lambda - b\lambda^2 - ab + 2b\lambda^2 - \lambda^3 - a\lambda - 2ab + 2a\lambda + 2ab - 2b^2\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda - ab = 0$$

$$\text{Spec} = \{b, \sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$$

$$* \begin{pmatrix} -2b & 1 & b \\ 2a & -b & -a \\ -2b & 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dus } (1, 0, 2) \text{ is eigenvect.}$$

* $b \neq \sqrt{a} \neq -\sqrt{a}$: diag., want 3 versch. eigenw. met multipl. 1

$$* b = \sqrt{a} \Rightarrow b^2 = a \quad m(b) = 2$$

$$\text{dan } \dim(E_b) = 2 : T_{a,b} w = bw \Leftrightarrow (T_{a,b} - bI_3)w = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2b & 1 & b & 0 \\ 2b^2 & -b & -b^2 & 0 \\ -2b & 1 & b & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2b & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow 2 \text{ vrije variabelen} \quad \dim(E_b) = 2 \rightarrow \text{diag.}$$

$$* \sqrt{a} = -\sqrt{a} \Rightarrow a = 0$$

Oefenzitting 9-15 december

6.1

Toon aan dat $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ met

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}: (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$$

e. Euclid. ruimte is.

Bereken voor volgende vect. hun lengte en voor elk tweetal vect. hun inproduct, afstand en hoek tussen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \|A_1\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\|A_2\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\times \langle A_1, A_2 \rangle = \text{Tr}(A_1^T A_2) = 2$$

$$A_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_1^T A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \|A_1 - A_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

$$\times \cos \theta = \frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\|A_1\| \|A_2\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

6.3

Toon aan dat $\{(3, -3, 0); (2, 2, -1); (1, 1, 4)\}$ e. orthog. basis is voor Euclid. ruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

→ orthog., dus 2 aan 2 $\perp$, dus inproduct = 0

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 6 - 6 + 0 = 0, \quad \text{dus } v_1 \perp v_2$$

$$\langle v_2, v_3 \rangle = 2 + 2 - 4 = 0, \quad \text{dus } v_2 \perp v_3$$

$$\langle v_1, v_3 \rangle = 3 - 3 + 0 = 0, \quad \text{dus } v_1 \perp v_3$$

Nu kijken of ze een basis vormen:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1, R_3 - 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \text{ lin onafh. vect.}, \text{ dus } \{v_1, v_2, v_3\} \text{ is orthog. basis}$$

6.5

Zij $\alpha = \{ \overset{v_1}{(1, 2, 0)}; \overset{v_2}{(1, 0, 1)}; \overset{v_3}{(2, 3, 1)} \}$ basis v. $\mathbb{R}^3$ Pas Gram-Schmidtprocedure toe om α om te vormen tot e. orthon. basis v. $\mathbb{R}^3$ t.o.v. standaard inproductx v_1 normeren: $\|v_1\| = \sqrt{5}$

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

x v_2 : $\langle v_2, u_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\text{norm } v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

$$= (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right) = (1, 0, 1) - \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right)$$

$$v_2' \perp u_1$$

$$v_2' \text{ normeren: } \|v_2'\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 1} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \right) = \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$x \quad v_3: \langle v_3, u_2 \rangle = \frac{8\sqrt{5}}{15} - \frac{6\sqrt{5}}{15} + \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

$$\text{norm } v_3' = v_3 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2$$

$$= (2, 3, 1) - \frac{7\sqrt{5}}{15} \left(\frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3} \right)$$

$$= (2, 3, 1) - \left(\frac{28 \cdot 5}{15 \cdot 15}, \frac{-14 \cdot 5}{15 \cdot 15}, \frac{7 \cdot 5}{15 \cdot 3} \right)$$

$$= (2, 3, 1) - \left(\frac{28}{45}, -\frac{14}{45}, \frac{7}{9} \right)$$

$$= \left(\frac{90}{45}, \frac{135}{45}, \frac{9}{9} \right) - \left(\frac{28}{45}, -\frac{14}{45}, \frac{7}{9} \right)$$

$$= \left(\frac{62}{45}, \frac{149}{45}, \frac{2}{9} \right) \quad \text{en } v_3' \perp u_2$$

$$v_3' \text{ normeren: } \|v_3'\| = \sqrt{\frac{3844}{2025} + \frac{22201}{2025} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{26045}{2025} + \frac{100}{2025}} = \sqrt{\frac{26145}{2025}} = \frac{\sqrt{26145}}{45} = \frac{162}{45}$$

$$u_3 = \frac{1}{\|v_3'\|} v_3' = \frac{45}{162} \left(\frac{62}{45}, \frac{149}{45}, \frac{2}{9} \right) = \left(\frac{45 \cdot 62}{162 \cdot 45}, \frac{45 \cdot 149}{162 \cdot 45}, \frac{45 \cdot 2}{162 \cdot 9} \right)$$

$$= \left(\frac{7 \cdot 31}{81 \cdot 11}, \frac{149}{162}, \frac{5}{81} \right) = \left(\frac{217}{891}, \frac{149}{162}, \frac{5}{81} \right)$$

 $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ is orthon. basis v. $\mathbb{R}^3$

→ rekenfout?

6.14

Vind orthog. matrix P zodat matrix $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ gelijkwaardig is met diagonaalmatrix

$$D = P^T A P$$

P bestaat uit eigenvect. v. A_1

* eigenw. v. A_1 zoeken:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)((2-\lambda)(3-\lambda)-4) - 2(2(3-\lambda)) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-4) - 2(6-2\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+2) - 12 + 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 2 - \lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 12 + 4\lambda = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 2} \quad -8 + 24 - 6 - 10 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 6 & -3 & -10 \\ 2 & 1 & -2 & 8 & 10 \\ \hline & -1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow -\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \quad \Delta = 16 + 4 \cdot 5 = 36$$

$$\lambda_2 = \frac{-4+6}{-2} = -1$$

$$\lambda_3 = \frac{-4-6}{-2} = 5$$

* eigenvect. zoeken:

$$\boxed{\lambda = -1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 2} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 5} \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{u}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.15

Bep. orthon. basis α voor vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$ met standaard inproduct zodat matrix L_α^α vld. lin. transf.

$$L: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}: \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+t & x+y+z \\ y+z+t & x+z+t \end{pmatrix} \text{ t.o.v. a diagonaal is}$$

Oefenzitting 16 - 22 december

6.8

Bep. orthog. complement v. deelruimte (t.o.v. standaard inproduct)

$$U_3 = \text{vct} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ in } \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

→ we moeten de matrix vinden die orthog. staat op matrices die U_3 voortbrengen

$$\text{Want } \dim U_3 = 3 \text{ en } \dim \mathbb{R}^{2 \times 2} = 4$$

$$\text{dus } \dim U_3^\perp = 1$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dus } U_3^\perp = \text{vct} \left\{ \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

6.16

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2a + 2b + 0c + d = 0$$