Lineaire Algebra: oefeningen

4.7) a) Welke van de volgende afbeeldingen zijn lineair?

$L_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |x - y|$

$L(0) = 0$ ✓

$L(a+b) = L(a) + L(b)$ ✓

$L(rx) = rL(x)$ ✓

De afbeelding is lineair

$L_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longmapsto (3y + z,\ x - y - z)$

$L(0) = 0$ ✓

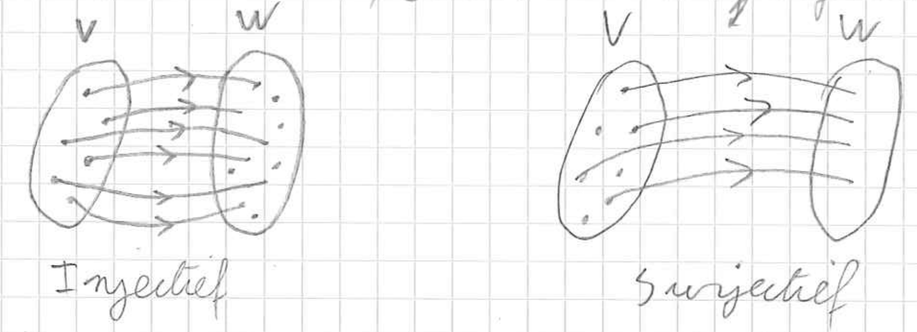
$L(a+b) = L(a) + L(b)$ ✓

$L(rx) = rL(x)$ ✓

De afbeelding is lineair

4.4) Zij $L : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen de vectorruimten $(\mathbb{R}, V, +)$ en $(\mathbb{R}, W, +)$ met $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ en $\dim_{\mathbb{R}} W = m$.

a) als $n > m$, dan is L niet injectief



β basis voor V : $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$

α basis voor W : $\{u_1, \ldots, u_m\}$

Volgens stelling 4.34: L is injectief asa $Ker(L) = \{0\}$

We moeten dus enkel bewijzen dat $Ker(L) \neq \{0\}$

Volgens de dimensiestelling geldt:

$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}}(Ker(L)) + \dim_{\mathbb{R}}(Im(L))$

$\Leftrightarrow \dim V = \dim Ker(L) + \dim W$

$\Rightarrow \dim Ker(L) = \dim V - \dim W$

$= n - m \geq 1$ (want $n > m$) $\boxtimes$

4) als $n < m$, dan is L niet surjectief

Duidelijk is dat de afbeelding niet bijectief is, want de dimensies verschillen.

Stel $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ een basis voor V

Stel dat L een surjectieve afbeelding is

Dan geldt zeker dat we een basis α kunnen vormen met $\alpha = \{L(v_1), \dots, L(v_n)\}$.

Dit zou een basis zijn met n minimum vectoren, dus dan zou $\dim_{\mathbb{R}}(W) = n$. maar $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m$, en $n < m$. ↯

Dus L kan niet ~~surject~~ surjectief zijn.

4.5) Bepalen de volgende voorschriften een unieke lineaire afbeelding? Zo ja, geef expliciet het lievoorschrift.

a) $L_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $L_1(1,2) = (0,-1)$ en
$L_1(-1,-1) = (2,1)$

$\{(1,2), (-1,-1)\}$ vormt een basis voor $\mathbb{R}^2$.

$(0,-1)$ en $(2,1)$ zijn lineair onafhankelijk.

De afbeelding is dus een unieke lineaire afbeelding

$$-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$a = -1 \qquad b = -1$

$(1,0) = \cancel{a}(1,2) + 2\cdot(-1,-1) \to (-1,-2)$

$(0,1) = (1,2) + (-1,-1) \to (1,1)$

$L_1(1,0) = -1(0,-1) - 2(2,1) = (-4,-1)$

$L_1(0,1) = (0,-1) + (2,1) = (2,0)$

$\to L_1(x,y) = (-4x+2y, -x)$

Lineaire Algebra: oefeningen

4.5 b) $L_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$

met $L_2(1,0,0) = (1+3X^2)$

$L_2(0,1,0) = 4-7X$

$L_2(0,0,1) = -5+4X^2$

$$\begin{array}{c|ccc} & X^0 & X^1 & X^2 \\ \hline x & 1 & 0 & 3 \\ y & 4 & -7 & 0 \\ z & -5 & 0 & 4 \end{array} \to \text{lineair onafhankelijk, dus unieke lin. afbeelding}$$

$$L_2(x,y,z) = (x+4y-5z) - 7yX + (3x+4z)X^2$$

c) $L_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ met

$L_3(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3(4,5,6) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$L_3(2,1,0) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

~~Deze matr~~ De rijen in deze matrix zijn niet vrij, dus het voorschrift bepaalt geen unieke lineaire afbeelding.

4.6) Bepaal de matrices van basisverandering van $\alpha \to \beta$

a) $\alpha = \{(5,1),(1,2)\}$, $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ in $\mathbb{R}^2$

$$Id_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Id_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/9 \\ -1/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

c) $\alpha = \{3 + 2X + X^2,\ 4 - X^2,\ 2 + X\}$

$\beta = \{X^2, X, 1\}$ in $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = Id_\beta^\alpha$$

$$Id_\alpha^\beta = (Id_\beta^\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

$\forall$ I_1 bv $\{1, X, X^2\}$

$\to$ Voor $\{X^2, X, 1\}$ rijen omwisselen

4.7) Beschouw de lineaire transformatie

$T: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}: f \mapsto f'' - 4f' + f$

Vind de matrix T_α^α met

$\alpha = \{X,\ 1+X,\ X+X^2,\ X^3\}$

$\cancel{\frac{dX}{dX} = 1}$ $\cancel{\frac{d(X+X^2)}{dX}}$

$\cancel{\frac{d^2X}{dX^2} = 0}$ $f(X) = 0 - 4 + X$

$= X - 4 = -4(1+X) + 5(X)$

$= [5\ -4\ 0\ 0]$

$f(X+1) = 0 - 4 + X + 1 = X - 3$

$f(X+X^2) = X - 4 + f(X^2) = [4\ -3\ 0\ 0]$

$= 2 - 4X + X^2 + X - 4$

$= X^2 - 3X - 2 = [-6\ -2\ 1\ 0]$

$f(X^3) = X^3 - 12X^2 + 6X$

$= [18\ 0\ -12\ 1]$

$$T_\alpha^\alpha = \begin{array}{c} X \\ 1+X \\ X+X^2 \\ X^3 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 4 & -6 & 18 \\ -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lineaire Algebra: oefeningen

4.8) Zij α de standaard basis van $\mathbb{R}^3$ en

$\beta = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ een andere basis.

Beschouw de lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x,y,z) = (x+2y+z, -y, x+4z)$$

a) Bereken de matrices van basisverandering van $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$

$$Id_\alpha^\beta = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \text{ of } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

deze is fout

$$Id_\beta^\alpha = (Id_\alpha^\beta)^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

! Matrix van basisverandering: beelden van de basisvectoren moeten in de kolommen v/d matrix

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow Id_\beta^\alpha = \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bepaal T_α^α en T_β^β

$$T_\beta^\beta = Id_\beta^\alpha \cdot T_\alpha^\alpha \cdot Id_\alpha^\beta$$

$$T_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.141 Beschouw de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ met

$$L_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad b = -3c$$

tov basissen $\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$

$\beta = \{(1,0), (1,1)\}$

a| Bepaal een basis en de dimensie van Ker L en Im L.

$$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \end{bmatrix}$$

De dimensie v.h beeld is 2, de dimensie v.d kern is 1.

Basis voor het beeld: $\{(4,0), (6,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b = -3c \quad \to \quad b = -3c$

$4a + 2b + c = 0 \quad\quad 4a - 5c = 0$

$c = 1 \to b = -3, \ a = 1{,}25$

$$L_\alpha^\beta \cdot \begin{bmatrix} 5/4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\{(5/4, -3, 1)\}$ is een basis voor Ker L

25/11/19 lineaire Algebra: oefenzitting 9

4.141 Beschouw de lineaire afbeelding $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ met

14, 17, 4, matrixvoorstelling $L_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ten opzichte v/d

20, 21 basissen $\alpha = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ en $\beta = \{(1,0), (1,1)\}$

a) Bepaal een basis en de dimensie van Ker L en Im L.

4.171 Zij $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ een lineaire afbeelding met matrix

$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ ten opzichte v/d standaardbasissen.

Zoek basissen α van $\mathbb{R}^2$ en β van $\mathbb{R}^3$ zodat L_α^β een matrix is zoals in stelling 4.39 $\begin{pmatrix} I_2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

(1) We bepalen een basis γ voor Ker(L)

$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{c|c}2 & -3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right] \to \{(2,-3)\}$ is een basis voor Ker L

(maakt onderste nul)

(2) Breid γ uit tot basis voor $\mathbb{R}^2$

$v_1 = (1,0) \to \gamma = \{(1,0),(2,-3)\}$ is een basis voor $\mathbb{R}^3$

(3) We bepalen het beeld van de toegevoegde vector:

$\cancel{(3,6,9)}$ $(2,4,6)$

$\to$ (zorgt voor I)

(4) We breiden uit tot een basis voor $\mathbb{R}^3$

$\{(0,0,1),(0,1,0),(2,4,6)\}$

Lineaire Algebra : Oefeningen

4.17) Zij $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ een lineaire afbeelding met matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$ t.o.v. de standaardbasissen.

Zoek basissen α van $\mathbb{R}^2$ en β van $\mathbb{R}^3$ zodat L_α^β een matrix is als in stelling 4.39:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ met r de rang v/d afbeelding

4.20) Zij $L : (\mathbb{R}, V, +) \to (\mathbb{R}, W, +)$ een lineaire afbeelding.

a) Bewijs: als A een deelruimte is van V, dan is $L(A) = \{L(v) \mid v \in A\}$ een deelruimte van W.

Stel $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ Stel $\dim_{\mathbb{R}}(A) = k$

Stel $\dim_{\mathbb{R}}(W) = m$

Stel β een basis voor V: $\beta = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$

α een basis voor A: $\alpha = \{v_1, \dots, v_k\}$

γ is een basis voor W: $\gamma = \{w_1, \dots, w_m\}$

We weten dat $W = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_k), L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$

$L(A) = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_k)\}$

Duidelijk is dat

$\text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_k)\} \subseteq \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_k), L(v_{k+1}), \dots, L(v_n)\}$

b) als B een deelruimte is van W, dan is ?

$A = \{v \in V \mid L(v) \in B\}$ een deelruimte van V.

$\gamma = \{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$ is een basis voor W

(met $k = \dim_{\mathbb{R}}(B)$, $m = \dim_{\mathbb{R}}(W)$)

$\gamma = \{w_1, \dots, w_k\}$ is een basis voor B

$\beta = \{v_1, \dots, v_t, v_{t+1}, \dots, v_n\}$ is een basis voor V ($t \in \mathbb{N}$, $t \leq n$)

$W = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_t), L(v_{t+1}), \dots, L(v_n)\}$

$B = \text{vct}\{L(v_1), \dots, L(v_t)\}$ want $B \subseteq W$

? Deelruimtecriterium gebruiken

Lineaire Algebra: ~~aff~~ oefeningen

4.21) Waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld

a) Zij V, W eindigdimensionale vectorruimten en $L: V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan bestaat er een deelruimte U van V zodat $\ker L \cap U = \{0\}$ en $\mathrm{Im}(L) = \{L(u) \mid u \in U\}$

Waar

b) Zij V, W eindigdimensionale vectorruimten. Dan bestaat er een surjectieve lineaire afbeelding $L: V \to W$ asa $\dim W \leq \dim V$.

~~Waar.~~ Niet waar.

Neem $W = \mathbb{R}^2$ $(\dim W = m = 2)$
Neem $V = \mathbb{R}^3$ $(\dim V = n = 3)$ $\Big\}\ m \leq n$

Het is duidelijk dat de afbeelding niet bijectief kan zijn

c) Beschouw de lineaire afbeelding $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bepaald door $T(x,y) = (y,x)$. Dan bestaat er een basis β van $\mathbb{R}^2$ zodat $T^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & b & a \end{array}\right)$$

23) Bepaal de rang van A in functie van x, waarbij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 8 \\ 3 & 3 & -9 & 8 \\ 1 & 1 & x & 4 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ zijn lineair afhankelijk, dus $\dim(Im(L)) \leq 3$

Stel $x = -3$, dan zijn $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ lineair afh

Dus als $x = -3 \to \dim(Im(L)) = 2$

$x \neq -3 \to \dim(Im(L)) = 3$

of: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 & 8 \\ 3 & 3 & -9 & 8 \\ 1 & 1 & x & 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -9 & 8 \\ 1 & 1 & x & 4 \end{pmatrix}$

$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & x+3 & 0 \end{pmatrix}$

Lineaire Algebra: oefeningen

5.1) a) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ idempotent ($A^2 = A$). Bepaal de eigenwaarden van A.

$$A^2 x = Ax = \lambda x$$

$$A^2 x = A\cdot(\lambda x) = \lambda\cdot(Ax) = \lambda^2 x$$

$$\Rightarrow A^2 x = \lambda^2 x$$

$$\lambda x = \lambda^2 x$$

$$(\lambda - \lambda^2)x = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

b) Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ niet-singulier. Bepaal de eigenwaarden van A^{-1} in termen van die van A.

$$A\cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot x = A^{-1}\cdot\lambda\cdot x$$

$$\mathbb{I}_n x = A^{-1}\cdot\lambda\cdot x$$

$$\frac{1}{\lambda} x = A^{-1} x \quad \rightarrow \text{De eigenwaarden zijn } \lambda^{-1}$$

als $\lambda \neq 0$

5.4) c) Bepaal de eigenwaarden λ en de bijhorende eigenruimten E_λ v.d. volgende matrices. Welke van deze matrices zijn diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$? over $\mathbb{C}$?

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$(-2)\,(2-\lambda)$
$= -4 + 2\lambda$

$$q_A = 3-\lambda\,((2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)) \qquad 0 - (-4+2\lambda) = 4$$

$$+2\cdot(0-(-2)\cdot(2-\lambda)) \quad = 0 \quad -(-4+2\lambda) = 4-2\lambda$$

$2(4-2\lambda) = 8-4\lambda$

$$= 3-\lambda((2-\lambda)(-1-\lambda))$$

$$+8-4\lambda$$

$$\cancel{= 8 - 4\lambda + 3 - \lambda(-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2)}$$

$$\cancel{= 6 - 4\lambda + (-6) - \lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3}$$

$$\cancel{= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0}$$

$$= -6 - 3\lambda + 3\lambda^2 + 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 - 8 + 4\lambda = 0$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 14$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 4 & 3 & 14 \\ 2 & & -2 & 4 & \cancel{22}\ 14 \\ \hline & -1 & 2 & \cancel{11}\ 7 & \cancel{102}\ 0 \end{array}$$

$$(\lambda - 2)(-\lambda^2 + 2\lambda + 7) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda - 14$$

Nulpunten van $-\lambda^2 + 2\lambda + 7$:

Rekenfoutje, Spec $= \{1, 2\}$

$$(3-\lambda)((2-\lambda)(-1-\lambda)) + 2 \cdot (2(2-\lambda))$$

$$= (3-\lambda)(-2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2) + 8 - 4\lambda$$

$$= -6 - \cancel{6\lambda} + \cancel{3\lambda} + \cancel{3\lambda^2}$$

$$+ \cancel{2\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \cancel{\lambda^3}$$

$$+ 8 - \cancel{4\lambda}$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad 1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad E_1 = \text{vct}\{(-1, 0, 1)\}$

$v_2 = 0 \quad v_1 + v_3 = 0$

$$Ax = \lambda x$$

$$(A - \lambda I)x = \vec{0}$$

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

Lineaire Algebra: oefeningen

5.51 Zij $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

a) Zij v een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ.
Bereken $(A^{10} + A^7 + 5A)v$

$Av = \lambda v$

$(A^{10} + A^{\cancel{7}\,7} + 5A)\,v$

$= A^{10}v + A^7 v + 5Av$

$= A^{10}v + A^7 v + 5\lambda v$

$= \lambda^{10} v + \lambda^7 v + 5\lambda v$

b) Wat zijn de eigenwaarden v/d matrix $A^{10} + A^7 + 5A$?

$(A^{10} + A^7 + 5A)\, v = \lambda_2 v$

$\to (\lambda^{10} \cancel{v} + \lambda^7 \cancel{v} + 5\lambda)\, v = \lambda_2\, v$

$\to \lambda_2 = \lambda^{10} + \lambda^7 + 5\lambda$

c) Bereken $A^{10}x$ voor de vector $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$?

$\to \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\to (1-\lambda)\,((5-\lambda)(-2-\lambda) - (-2 \cdot 6)) = 0$

$\to (1-\lambda)\,(-10 - 5\lambda + 2\lambda + \lambda^2) - 12$

$= -10 - \cancel{5}\lambda + 2\lambda + \lambda^2$

$+ 10\lambda + 5\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^3 - 12$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda - 22 = 0$

$\to \lambda =$

5.6) Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

a) Toon aan dat A singulier is als en enkel en slechts als 0 een eigenwaarde is van A.

Als 0 een eigenwaarde is van A, dan is ook

$\det(A - \lambda I_n) = \det(A - 0 \cdot I_n) = \det(A) = 0$

~~Als~~ Een matrix is singulier asa

$\det(A) = 0$

$\Rightarrow$: Duidelijk is dat als 0 een eigenwaarde is dan $\det(A - \lambda I_n) = \det(A) = 0$ en dan moet de matrix dus singulier zijn

$\Leftarrow$: ...

b) Wat is E_0 precies (als A singulier is)?

$$(A - \lambda I_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$E_0 = \{ X \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X = 0 \cdot X \}.$$

Dit is precies de nulruimte $N(A)$ van A.

Lineaire Algebra: oefeningen

5.8) Beschouw de lineaire transformatie $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met eigenwaarden $-1, 0, 1$ en bijhorende resp. eigenvect. v_1, v_2, v_3. Bepaal Ker L en Im L.

$Ker(L) = \cancel{\{(v_1, v_2, v_3)\}}$

$$\left\{ vct\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right\} \mid L \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \right\}$$

$$= \{ v \mid L(v) = \vec{0} \}$$

$$L(v) = \vec{0} \to A \cdot v = 0 \cdot v$$

$\to Ker(L) = vct\{v_2\}$

$\to Im(L) = vct\{L(v_1), L(v_3)\}$

5.10) zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een 3-dimensionale vct over $\mathbb{R}$ en $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ een basis voor V. Beschouw de lin. transf $T: V \to V$ gedefinieerd door

$$T(v_1) = 5v_1 + 2v_2 + 3v_3$$
$$T(v_2) = 2v_1 - v_2$$
$$T(v_3) = 3v_1 + v_3$$

$$T_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Bereken de eigenwaarden van T

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)((-1-\lambda)(1-\lambda)) = (5-\lambda)(-1 + \lambda^2)$$
$$+ 2(2-2\lambda) \qquad + 4 - 4\lambda + 9 + 9\lambda$$
$$-3(-3-3\lambda)$$

$= (5-\lambda)(-1+\lambda^2)$
$+4 - 4\lambda + 9 + 9\lambda$

$\varphi_T = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 14\lambda$

$= \lambda(-\lambda^2 + 5\lambda + 14)$

$\mathrm{spec}(T) = \{0, 7, -2\}$

b) Bereken de eigenruimte van T bij elke eigenwaarde.

$\underline{\lambda = 0}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_2 + 3v_3 = 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$v_2 = t \rightarrow v_3 = -\frac{2}{3}t$

$v_1 = -t + \frac{2}{3}t = -\frac{1}{3}t$

$$\rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$E_0 = \mathrm{vct}\{(1, -1/3, 2/3)\}$

Lineare Algebra: Pfenningen

S. 10 | b)

$\underline{\lambda = -2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow 2v_1 = -v_2 \rightarrow v_2 = -2v_1$

$v_1 = v_3$

$$v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow E_{-2} = \text{vec}\{(1, -2, 1)\}$$

$\underline{\lambda = 7}$

$$\begin{pmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -16 & -13 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 16 & 13 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 8 \end{pmatrix}$$

$v_1 = c$

$v_1 = -3v_2 \rightarrow v_2 = -1/3\, c$

$-9v_2 = -8v_3 \rightarrow v_3 = 9/8\, v_2 = 9/8 \cdot (-1/3)\, c$

$= -9/24\, c$

$= -3/8\, c$

$$\rightarrow v_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \\ -3/8 \end{pmatrix} \rightarrow E_7 = \text{vec}\{(1, -1/3, -3/8)\}$$

c) Bestaat er een basis $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ van eigenvectoren voor T?

$\to$ Enkelvoudig spectrum, dim 3 $\to$ eigenvect zijn vrij

$\to \{v_0, v_2, v_{-7}\}$ is een basis voor T

d) Wat is de matrix van T ten opzichte van β?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

e) Vind de matrix van basisverandering P van β naar α

$$T_\alpha^\alpha = P^{-1} T_\beta^\beta P$$

$$Id_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & -2 \\ 2/3 & 3/8 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}$$

$$P = \left(Id_\alpha^\beta\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/3 & -1/3 & -2 \\ 2/3 & 3/8 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -6/7 & 9/7 & 24/7 \\ 72/35 & -24/35 & -24/7 \\ -1/5 & -3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Lineaire Algebra: oefeningen

6.1) Toon aan dat $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, met $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = Tr(A^T B)$ een Euclidische ruimte is. Bereken voor volgende vectoren hun lengte en voor elk tweetal vectoren hun inproduct, de afstand en de hoek ertussen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Eucl. ruimte → eindig dim inproductruimte

→ Aantonen dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct is (zie 6.6.5)

$$\|A_1\| = \sqrt{\langle A_1, A_1 \rangle} = \sqrt{Tr(A_1^T A_1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|A_2\| = \sqrt{\langle A_2, A_2 \rangle} = \sqrt{Tr(A_2^T A_2)} = \sqrt{5}$$

$$\langle A_1, A_2 \rangle = Tr(A_1^T A_2) = 2$$

$$d(A_1, A_2) = \|A_1 - A_2\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\|A_1\| \cdot \|A_2\|} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0,46364\ldots$$

6.3) Toon aan dat $\{(3,-3,0),(2,2,-1),(1,1,4)\}$ een orthogonale basis is voor de Euclidische ruimte $(\mathbb{R},\mathbb{R}^3,+,<.,.>)$.

(1) $<v_i, v_j> = 0 \quad \forall i \neq j$

(2) $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$ (orthonormaal)

(1) $< \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} > = 0$

$< \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} > = 0$

$< \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (1\ 1\ 4) > = 0$

(2) $\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{<(3,-3,0),(3,-3,0)>}$

$= \sqrt{18}$

$\rightarrow$ Niet orthonormaal

Lineaire Algebra: oefeningen

6.5) Zij $\alpha = \{(1,2,0),(1,0,1),(2,3,1)\}$ een basis van $\mathbb{R}^3$. Pas de Gram-Schmidt procedure toe om α om te vormen tot een orthonormale basis v/h standaard inproduct

$$u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \qquad \|v_1\| = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{5}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}} = 1/\sqrt{5}$$

$$= (1,0,1) - \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(4/5, -2/5, 1\right)$$

$$u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2', \quad \|v_2'\| = \sqrt{\begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= 9/5$$

$$= \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ -2/9 \\ 5/9 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle v_2$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$\langle v_3, u_1 \rangle u_1 = \frac{8}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 16/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/9 \\ -2/9 \\ 5/9 \end{bmatrix} = 8/9 - 6/9 + 5/9 = 7/9$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \frac{6}{9} \begin{pmatrix} 4/9 \\ -2/9 \\ 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/81 \\ -12/81 \\ 30/81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/27 \\ -4/27 \\ 10/27 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/9 \\ 16/5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8/27 \\ -4/27 \\ 10/27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74/135 \\ -7/135 \\ 17/27 \end{pmatrix}$$

6.8) c) Bepaal het orthogonaal complement v/d volgende deelruimten (t.o.v. standaard inproduct).

$$U_3 = \text{vct}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V^{\perp} = \{ v \in V \mid v \perp u \ \forall u \in V \}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{lineair onafhankelijk}$$

$$\dim(U_3^{\perp}) = 1 \qquad \text{Tr}(A^T B) = 0$$

$$< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} > = 0$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \neq 0}$$

$b = 2$
$d = 2$
$a = -3$
$c = -7$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \neq 0}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \neq 0}$$

$$\rightarrow \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a+c & / \\ / & 2d \end{bmatrix}\right) = 0 = a + c + 2d$$

$$\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a+c & \\ & b+d \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a & \\ & 2b+d \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + c + 2d = 0 \\ a + c + b + d = 0 \\ 2a + 2b + d = 0 \end{cases} \Rightarrow b = d \quad \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$$

$$b = -\frac{2}{3}a \rightarrow a = -3/2\, b = -3$$

$$c = -2b - a = \left(-\frac{4}{3}a - a\right) = -7/3\, a$$

$$\rightarrow \text{vct}\left\{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

Lineaire Algebra: oefeningen

6.14) a) Vinden een orthogonale matrix P zdd de volgende matrices A gelijkvormig zijn met een diagonaalmatrix $D = P^T A P$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

P bestaat uit eigenvectoren van A. → ~~eigen~~ eigenw. zoeken

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)((3-\lambda)(2-\lambda)-4) = (1-\lambda)(6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-4)$$
$$-2(6-2\lambda) \qquad -12+4\lambda$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+2) - 12+4\lambda$$
$$= \cancel{\lambda^2} - 5\lambda + 2 - \lambda^3 + \cancel{5}\lambda^2 - 2\lambda + 4\lambda - 12$$
$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

$\lambda = 2$ is een eigenwaarde → afsplitsen

	-1	6	-3	-10
2		-2	8	10
	-1	4	5	0

$$(\lambda-2)(-\lambda^2+4\lambda+5) = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{Spec}(A) = \{2, -1, 5\}$$

Eigenvectoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow c = -1$

$-1 + 2b = 0$

$\rightarrow b = 0,5$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -1$ $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,\ b = -1 \\ c = 0,5 \end{cases}$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$: $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$ (klein naar grote eigenw)

Lineaire Algebra: oefeningen

6.15) Bepaal een orthonormale basis α van de vectorruimte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2\times2}, +)$ met standaard inproduct zodat de matrix L_α^α van de lineaire transformatie $L: \mathbb{R}^{2\times2} \Rightarrow \mathbb{R}^{2\times2}$:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+t & x+y+z \\ y+z+t & x+z+t \end{pmatrix}$$ tov α diagonaal is

β_B = stand. basis

$$L_{\beta_B}^{\beta_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

We zoeken eigenvectoren voor $L^\alpha_{\beta_B}$. Aangezien $L^\alpha_{\beta_B}$ symm. is, is $L^\alpha_{\beta_B}$ diagonaliseerbaar en vormen de eigenvect van $L^\alpha_{\beta_B}$ een orthogonale basis

→ dan nog normaliseren.

6.16) Beschouw in $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +)$ de lineaire deelruimten
$V = \text{vct}\{(1,0,1,0),(1,a,0,a)\}$ en
$W = \text{vct}\{(-1,a,a^2,0),(0,1,0,-1)\}$

Bespreek $\dim(V^\perp + W)$ in fie v/ parameter $a \in \mathbb{R}$
We berekenen eerst $V^\perp$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \rightarrow e + c = 0 \rightarrow e = -c$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \rightarrow e + ab + ad = 0$$

als $a \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} e = -1 \rightarrow c = 1 \\ a(b+d) = 1 \\ b + d = 1/a \\ b = 1 \rightarrow d = 1/a - 1 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1/a - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = 0 \rightarrow f + h = 0$$
$$\rightarrow f = -h$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = 0 \rightarrow f + ag + ai = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & \frac{1}{a} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \\ h \\ i \end{bmatrix} = 0 \rightarrow -f + g + h + \left(\frac{1}{a} - 1\right) i = 0$$

$$g + \left(\frac{1}{a} - 1\right) i - 2f = 0$$