Inhoudsopgave

1 Gedeelde differenties

1.1 Verband met de interpolerende veelterm

In deze sectie wordt bewezen dat $f[x_0, \ldots, x_n]$ gelijk is aan de hoogstegraadscoëfficiënt van de interpolerende veelterm van graad n door de punten $x_0, \ldots, x_n$.

Stelling 1. *Voor vaste punten $x_0, \ldots, x_k$ is de functie $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} : f \mapsto f[x_0, \ldots, x_k]$ een lineare afbeelding.*

Stelling 2. *Zij $k \leq r$. Dan is*

$$x^r[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{e_0 + \cdots + e_k = r-k} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \ldots x_k^{e_k} \tag{1}$$

We sommeren voor alle duidelijkheid over $\{(e_0, \ldots, e_k) \in \mathbb{N} | e_0 + \ldots + e_k = r - k\}$.

Voorbeeld 3.

1. $x^5[x_0, x_1] = x_0^4 + x_0^3 x_1 + x_0^2 x_1^2 + x_0 x_1^3 + x_1^4$.
2. $x^3[x_0, x_1, x_2] = x_0 + x_1 + x_2$.

Bewijs. Het bewijs gaat per inductie op k.

1. $\boxed{k = 0}$

$$x^r[x_0] = x_0^r = \sum_{e_0 = r-0} x_0^{e_0} \tag{2}$$

2. $\boxed{k > 0}$

$$x^r[x_0, \ldots, x_k] = \frac{x^r[x_0, \ldots, x_{k-1}] - x^r[x_1, \ldots, x_k]}{x_0 - x_k} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_k} \left(\sum_{e_0 + \cdots + e_{k-1} = r-k+1} x_0^{e_0} \ldots x_{k-1}^{e_{k-1}} - \sum_{e_1 + \cdots + e_k = r-k+1} x_1^{e_1} \ldots x_k^{e_k} \right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_k} \left(\sum_{e_1 + \cdots + e_{k-1} + \lambda = r-k+1} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_{k-1}^{e_{k-1}} (x_0^{\lambda} - x_k^{\lambda}) \right), \tag{5}$$

Waarbij we (5) bekomen uit (4) door in de eerste som e_0 en in de tweede e_k door λ te vervangen en vervolgens distributiviteit toe te passen. We kunnen nu de factor $\frac{1}{x_0 - x_k}$ in de som binnenbrengen en samennemen met $x_0^\lambda - x_k^\lambda$:

$$\frac{x_0^\lambda - x_k^\lambda}{x_0 - x_k} = \sum_{i=0}^{\lambda-1} x_0^i x_k^{\lambda-1-i} = \sum_{e_0+e_k=\lambda-1} x_0^{e_0} x_k^{e_k}, \tag{6}$$

zodat

$$\begin{aligned} x^r[x_0, \ldots, x_k] &= \sum_{e_1+\cdots+e_{k-1}+\lambda=r-k+1} \left(x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_{k-1}^{e_{k-1}} \sum_{e_0+e_k=\lambda-1} x_0^{e_0} x_k^{e_k} \right) \qquad (7) \\ &= \sum_{e_0+\cdots+e_k=r-k} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \ldots x_k^{e_k}. \end{aligned}$$

□

Gevolg 4. *1.* $x^r[x_0, \ldots, x_r] = 1$ *en voor* $s > r$ *is* $x^r[x_0, \ldots, x_s] = 0$.

2. Zij f *een veelterm van graad* n*. Dan is* $f[x_0, \ldots, x_n]$ *gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van* f*.*

Bewijs. 1. Uit lemma 2 volgt:

$$x^r[x_0, \ldots, x_r] = \sum_{e_0+\cdots+e_r=0} x_0^{e_0} x_1^{e_1} \ldots x_r^{e_r} = x_0^0 x_1^0 \ldots x_r^0 = 1. \tag{8}$$

Omdat de r-de orde gedeelde differentie constant is, zullen alle hogere orde differenties dan gelijk zijn aan 0.

2. Zij $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$. Dan is

$$f[x_0, \ldots, x_r] = \sum_{i=0}^n a_i x^i[x_0, \ldots, x_r]. \tag{9}$$

Wegens puntje 1 weten we dat voor $i < r : x^i[x_0, \ldots, x_r] = 0$, en $x^r[x_0, \ldots, x_r] = 1$, zodat $f[x_0, \ldots, x_r] = a_r$. □

Stelling 5. *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie en* y_n *de interpolerende veelterm van graad* n *door de punten* $x_0, x_1, \ldots x_n$*. Dan is* $f[x_0, \ldots, x_n]$ *gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van* y_n*.*

Bewijs. Omdat f en y_n dezelfde functiewaarden hebben in $x_0, x_1, \ldots, x_n$, zijn hun differenties gelijk. □

Gevolg 6. *Een gedeelde differentie is onafhankelijk van de volgorde van de argumenten.*

1.2 Een expliciete formule

Stelling 7.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{\pi'(x_j)}, \tag{10}$$

waarbij $\pi(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$*, en dus* $\pi'(x_j) = \prod_{i=0; i\neq j}^n (x_j - x_i)$*.*

Bewijs. Noteer

$$\ell_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \tag{11}$$

de i-de basisveelterm van Lagrange. De hoogstegraadscoëfficiënt van ℓ_i is gelijk aan

$$\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{\pi'(x_i)}. \tag{12}$$

De interpolerende veelterm y_n van f is te schrijven als $y_n = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot \ell_j$, en de hoogstegraadscoëfficiënt van y_n zal dan gelijk zijn aan

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\pi'(x_j)}. \tag{13}$$

Wegens stelling 5 is dan ook $f[x_0, \ldots, x_n]$ hieraan gelijk. $\square$

1.3 Verband met afgeleiden

Stelling 8. *Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n keer afleidbaar en stel $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Dan is er een $\xi \in [x_0, x_n]$ zodat $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$*

Bewijs. Zij y_n de interpolerende veelterm door $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Definieer $g = f - y_n$. Dan is $g(x_i) = 0$ voor elke i. Herhaaldelijk de middelwaardestelling van Rolle toepassen levert ons nulpunten

- $x_0^{(1)}, \ldots, x_{n-1}^{(1)}$ van g', waarbij $x_i^{(1)} \in [x_i, x_{i+1}]$
- $x_0^{(2)}, \ldots, x_{n-2}^{(2)}$ van g'', waarbij $x_i^{(2)} \in [x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}]$
- ...
- $x_0^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}$ van $g^{(n-1)}$, waarbij $x_i^{(n-1)} \in [x_i^{(n-1)}, x_{i+1}^{(n-1)}]$
- $\xi := x_0^{(n)}$ van $g^{(n)}$, dus $\xi \in [x_0^{(n-1)}, x_1^{(n-1)}] \subset [x_0, x_n]$

Nu is $f^{(n)}(\xi) = y_n^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, \ldots, x_n]$, omdat $f[x_0, \ldots, x_n]$ de hoogstegraadscoëfficiënt is van y_n. Dus is $f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ $\square$

Gevolg 9. *Zij f een C^n-functie. Dan is*

$$\lim_{x_0, \ldots, x_n \to x} f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}. \tag{14}$$

1.4 Verband met de interpolerende veelterm van Newton

Stelling 10. *Noteer* $\varphi_i = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$. *Zij* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *een functie en* $y_n = \sum_{i=0}^{n} b_i\varphi_i$ *de interpolerende veelterm van graad* n. *Dan is* $b_k = f[x_0, \ldots, x_k]$.

Bewijs. Zij y_k de interpolerende veelterm van graad k door $x_0, \ldots, x_k$, dan is $y_k = \sum_{i=0}^{k} b_i\varphi_i$. Inderdaad, voor $j \leq k$ is

$$\sum_{i=0}^{k} b_i\varphi_i(x_j) = y_n(x_j) - \sum_{i=k+1}^{n} b_i\varphi_i(x_j) = y_n(x_j) = f(x_j). \tag{15}$$

Dus is $f[x_0, \ldots, x_k]$ gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van y_k, en dit is precies b_k. □

1.5 Productformule (formule van Leibniz)

Stelling 11. *Zij* $f = g \cdot h$. *Dan is* $f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot h[x_j, \ldots, x_n]$.

Bewijs. Noteer

- $\varphi_{0j}(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)$, de j-de basisveelterm van Newton, en
- $\varphi_{nj}(x) = \prod_{i=j+1}^{n}(x - x_i)$, de $(n - j)$-de basisveelterm in achteruit.

Volgens stelling 10 kunnen we dan de interpolerende veelterm y_g van g door de punten $x_0, \ldots, x_n$ schrijven als

$$y_g(x) = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot \varphi_{0j}(x), \tag{16}$$

en als we de punten $x_0, \ldots, x_n$ in omgekeerde volgorde nemen, kunnen we analoog de interpolerende veelterm y_h van h schrijven als

$$y_h(x) = \sum_{j=0}^{n} h[x_j, \ldots, x_n] \cdot \varphi_{nj}(x). \tag{17}$$

Definieer nu $p = y_g \cdot y_h$. Dan zal voor elk interpolatiepunt x_i zeker $p(x_i) = g(x_i) \cdot h(x_i) = f(x_i)$. Werk p een klein beetje uit:

$$p(x) = y_g(x) \cdot y_h(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot \varphi_{0j}(x)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} h[x_k, \ldots, x_n] \cdot \varphi_{nk}(x)\right) \tag{18}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot h[x_k, \ldots, x_n] \cdot \varphi_{0j}(x) \cdot \varphi_{nk}(x). \tag{19}$$

We bekijken nu de veeltermen $\varphi_{0j} \cdot \varphi_{nk}$ van naderbij. Merk ten eerste op dat φ_{0j} graad j heeft en φ_{nk} graad $n - k$. Dus $\varphi_{0j} \cdot \varphi_{nk}$ heeft graad $n + (j - k)$.
Ten tweede is duidelijk dat voor $i < j : \varphi_{0j}(x_i) = 0$ en voor $i > k : \varphi_{kn}(x_i) = 0$. Wanneer $k < j$ zal ofwel $i < j$ ofwel $i > k$, dus zal $(\varphi_{0j}\varphi_{nk})(x_i) = 0$ voor elk interpolatiepunt x_i. Merk op dat $k < j$ asa $\deg(\varphi_{0j}\varphi_{nk}) > n$.

Definieer nu

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot h[x_k, \ldots, x_n] \cdot \varphi_{0j}(x) \cdot \varphi_{nk}(x). \tag{20}$$

Met andere woorden, q is p, maar dan zonder de termen met graad groter dan n. Dus zal nog steeds $q(x_i) = p(x_i) = f(x_i)$ voor elk interpolatiepunt x_i. Bovendien is $\deg(q) \leq n$, waaruit volgt dat q de interpolerende veelterm van f door $x_0, \ldots, x_n$ is. Wegens stelling 5 is $f[x_0, \ldots, x_n]$ dan gelijk aan de hoogstegraadscoëfficiënt van q. Die vinden we door de coëfficiënten bij de veeltermen $\varphi_{0j}\varphi_{nk}$ van graad n te sommeren. Nu is $\deg(\varphi_{0j}\varphi_{nk}) = n$ asa $k = j$. We besluiten dat $f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j] \cdot h[x_j, \ldots, x_n]$. □

2 B-splines

We zoeken een spline-functie die op zo veel mogelijk intervallen (maar niet overal) identiek 0 is. Noem de knooppunten van de verzameling spline-functies waarin we werken, t_i. Om ons niet druk te moeten maken over de randverschijnselen, werken we met (aftelbaar) oneindig veel knooppunten, genummerd in stijgende lijn.

Stelling 12. *Zij $k \geq 0$ en $p \in \mathbb{Z}$. Er bestaat, op een constante factor na, een unieke spline-functie s van graad k zodat*

- $\forall x < t_p : s(x) = 0,$
- $\forall x \geq t_{p+k+1} : s(x) = 0,$
- *s is niet de nulfunctie.*

Met name is $s(x) = (t-x)_+^k[t_p, t_{p+1}, \ldots, t_{p+k+1}]_t$ (de gedeelde differentie naar de veranderlijke t, geëvalueerd in x).

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid stellen we $p = 0$.

- $\boxed{\text{Uniciteit}}$ Zij s zo'n functie. We weten dat $\{1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}\} \cup \{(t_i - x)_+^k | i \in \mathbb{Z}\}$ een basis vormt voor de spline-functies van graad k. We kunnen $s(x)$ dus schrijven als

$$s(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i \cdot (t_i - x)_+^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i. \tag{21}$$

  Omdat s een spline-functie is, is de beperking van s tot elk interval $[t_j, t_{j+1}[$ een veeltermfunctie. Noteer de overeenkomstige veelterm dan met $s_j \in \mathbb{R}[x]$. Dan is (let op de eerste sommatie)

$$s_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} a_i \cdot (t_i - x)^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i, \tag{22}$$

  en dus

$$s_j - s_{j-1} = a_j \cdot (t_j - x)^k. \tag{23}$$

  Uit de voorwaarden volgt dat voor $j < 0$ en voor $j > k : s_j = 0$. Hieruit en uit (23) volgt dat voor $j < 0$ en voor $j > k+1 : a_j = 0$. Maar dan is

$$s_{k+1} = \sum_{i=k+2}^{\infty} a_i \cdot (t_i - x)^k + \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \cdot x^i. \tag{24}$$

Omdat $s_{k+1} = 0$, volgt dan dat alle $b_i = 0$. We kunnen $s(x)$ dus schrijven als

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot (t_i - x)_+^k, \tag{25}$$

en voor $j < 0$ is

$$s_j = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \cdot (t_i - x)^k. \tag{26}$$

Voor $j < 0$ moet $s_j = 0$, en dit is het geval asa alle coëfficiënten bij verschillende machten van x gelijk aan nul zijn. De coëfficiënt c_r bij x^{k-r} is gelijk aan

$$c_r = \sum_{i=0}^{k+1} a_i \binom{k}{r} (-1)^{k-r} t_i^r \sim \sum_{i=0}^{k+1} a_i t_i^r. \tag{27}$$

Dit levert een $(k+1) \times (k+2)$-stelsel van Vandermonde op:

$$V_k(t_0, \dots, t_{k+1}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^k & t_1^k & \cdots & t_{k+1}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{28}$$

We kunnen dit stelsel uitbreiden tot een vierkantig stelsel van Vandermonde:

$$V = V_{k+1}(t_0, \dots, t_{k+1}) \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^k & t_1^k & \cdots & t_{k+1}^k \\ t_0^{k+1} & t_1^{k+1} & \cdots & t_{k+1}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}. \tag{29}$$

En er geldt: $\mathbf{a}$ is een oplossing van (28) asa er een λ bestaat zodat $\mathbf{a}$ een oplossing is van (29).

Voor een vaste λ is dit stelsel uniek oplosbaar. Zij $W = V^{-1}$ en $w_{*,k+1}$ de laatste kolom van W, dan is het duidelijk dat $\lambda w_{*,k+1}$ een oplossing is van (29). Uit onderstaand lemma volgt dat $w_{i,k+1} = \frac{1}{\pi'(t_i)}$. Dus zal $a_i = \frac{\lambda}{\pi'(t_i)}$ en kunnen we, gebruikmakend van (25) en stelling 7, $s(x)$ uiteindelijk schrijven als

$$\begin{aligned} s(x) &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\lambda}{\pi'(t_i)} \cdot (t_i - x)_+^k && (30) \\ &= \lambda \cdot \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi'(t_i)} && (31) \\ &= \lambda \cdot (t - x)_+^k [t_0, t_1, \dots, t_{k+1}]_t. && (32) \end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Existentie}}$ De gegeven functie voldoet aan de eisen.

$\square$

Lemma 13. *Zij*

$$V = V_n(t_0, \ldots, t_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_0^n & t_1^n & \cdots & t_n^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{33}$$

een Vandermonde-matrix en zij $W = V^{-1}$. Nummer de elementen van de matrices te beginnen bij 0 en zij ℓ_i de i-de basisveelterm van Lagrange, dus $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$. Dan is w_{ij} gelijk aan de coëfficiënt bij x^j in ℓ_i. In het bijzonder is $w_{in} = \frac{1}{\pi'(x_i)}$.

Bewijs. Noteer $f_i(x) = \sum_{k=0}^{n} w_{ik} x^k$.

$$\delta_{ij} = I_{ij} = (WV)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \cdot v_{kj} = \sum_{k=0}^{n} w_{ik} \cdot t_j^k = f_i(t_j). \tag{34}$$

Als $f_i(t_j) = \delta_{ij}$ voor alle j, dan moet $f_i = \ell_i$. Hiermee is het lemma bewezen. $\square$

Definitie 14. De p-de B-spline van graad k wordt gedefinieerd als

$$M_{p,k}(x) := (t - x)_+^k [t_p, \ldots, t_{p+k+1}]_t. \tag{35}$$

2.1 Recursieformule

Stelling 15.

$$M_{p,k+1}(x) = \frac{x - t_p}{t_{p+k+2} - t_p} M_{p,k}(x) + \frac{t_{p+k+2} - x}{t_{p+k+2} - t_p} M_{p+1,k}(x). \tag{36}$$

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen we dat $p = 0$. Noteer

- $\pi_0(x) = \prod_{i=0}^{k+1} (x - t_i)$,
- $\pi_1(x) = \prod_{i=1}^{k+2} (x - t_i)$,
- $\pi(x) = \prod_{i=0}^{k+2} (x - t_i)$.

We gebruiken stelling 7:

$$\frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} M_{0,k}(x) = \frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi_0'(t_i)} \tag{37}$$

$$= \frac{x - t_0}{t_{k+2} - t_0} \sum_{i=0}^{k+1} \frac{t_i - t_{k+2}}{t_i - x} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \tag{38}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{x - t_0}{x - t_i} \cdot \frac{t_{k+2} - t_i}{t_{k+2} - t_0} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)}, \tag{39}$$

waarbij we in de laatste sommatie de term voor $i = k+2$ mogen toevoegen omdat die toch gelijk is aan 0. Analoog berekenen we:

$$\frac{t_{k+2}-x}{t_{k+2}-t_0} M_{1,k}(x) = \frac{t_{k+2}-x}{t_{k+2}-t_0} \sum_{i=1}^{k+2} \frac{(t_i - x)_+^k}{\pi_1'(t_i)} \tag{40}$$

$$= \frac{t_{k+2}-x}{t_{k+2}-t_0} \sum_{i=1}^{k+2} \frac{t_i - t_0}{t_i - x} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \tag{41}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{x - t_{k+2}}{x - t_i} \cdot \frac{t_i - t_0}{t_{k+2} - t_0} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)}. \tag{42}$$

Tellen we beide op, dan vinden we:

$$\frac{x - t_0}{t_{k+2}-t_0} M_{0,k}(x) + \frac{t_{k+2}-x}{t_{k+2}-t_0} M_{1,k}(x) \tag{43}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{(x-t_0)(t_{k+2}-t_i) + (x - t_{k+2})(t_i - t_0)}{(x-t_i)(t_{k+2}-t_0)} \cdot \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} \tag{44}$$

$$= \sum_{i=0}^{k+2} \frac{(t_i - x)_+^{k+1}}{\pi'(t_i)} = M_{0,k+1}(x).$$ □

2.2 Normalisatie van B-splines

Definitie 16. De p-de genormaliseerde B-spline van graad k wordt gedefinieerd als

$$N_{p,k}(x) := (t_{p+k+1} - t_p) M_{p,k}. \tag{45}$$

Stelling 17. *Voor willekeurige x en k is*

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = 1. \tag{46}$$

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid veronderstellen we $x \in [t_k, t_{k+1}[$. Voor $p \leq -1$ en $p \geq k+1$ is dan $N_{p,k}(x) = 0$.

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = \sum_{p=0}^{k} N_{p,k}(x) \tag{47}$$

$$= \sum_{p=0}^{k} (t_{p+k+1} - t_p) \cdot (t-x)_+^k [t_p, \ldots, t_{p+k+1}]_t \tag{48}$$

$$= \sum_{p=0}^{k} \left((t-x)_+^k [t_{p+1}, \ldots, t_{p+k+1}]_t - (t-x)_+^k [t_p, \ldots, t_{p+k}]_t \right), \tag{49}$$

waarbij we in de laatste stap van de recursieve definitie van gedeelde differenties gebruikmaakten. Merk op dat het tweede deel van de term voor p wegvalt tegenover het eerste deel van de term voor $p-1$. Blijft over:

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = (t-x)_+^k [t_{k+1}, \ldots, t_{2k+1}]_t - (t-x)_+^k [t_0, \ldots, t_k]_t \tag{50}$$

Omdat $t_0, \ldots, t_k$ alle kleiner zijn dan x, is $(t_i - x)_+^k = 0$ voor $i = 0, \ldots, k$. Dus is $(t - x)_+^k[t_0, \ldots, t_k]_t = 0[t_0, \ldots, t_k]_t = 0$.
Omdat $t_{k+1}, \ldots, t_{2k+1}$ alle groter zijn dan x, is $(t_i - x)_+^k = (t_i - x)^k$ voor $i = k+1, \ldots, 2k+1$. Dus is $(t - x)_+^k[t_{k+1}, \ldots, t_{2k+1}]_t = (t - x)^k[t_{k+1}, \ldots, t_{2k+1}]_t = 1$, want 1 is de hoogstegraadscoëfficiënt bij t in de veelterm $(t - x)^k$.
We besluiten dat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} N_{p,k}(x) = 1 - 0 = 1. \qquad \square$$