Tussentijdse Toets Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie, Geografie, Geologie, Informatica, Schakelprogramma Master Toegepaste Informatica, Master Chemie
donderdag 14 november 2013, 8:30-10:00 uur
in auditoria K.00.07 en L.00.07

Naam:

Studierichting:

Naam assistent:

(Assistenten zijn: Emmanuel Bultot, Sander Devriendt, Maciej Haneczok, Hilde Hoegaerts, Jonas Kaerts, Tristan Kuijpers, Nele Lejon, Berdien Peeters, Céline Pringels, Jasper Van Hirtum en Sofie Van Thielen).

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent.
- Succes!

Naam: **Studierichting:**

Vraag 1 Neem $p \in \mathbb{R}$ met $p > 0$ en

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^p} \qquad \text{voor } x \geq 0.$$

3pt (a) Bereken de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ als $a \geq 0$. Bereken ook de snijpunten van de raaklijn met de coördinaatassen.

4pt (b) Het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van f te wentelen rond de x-as is

$$\pi \int_0^\infty [f(x)]^2 \, dx.$$

Voor welke $p > 0$ is de oneigenlijke integraal convergent? Bereken het volume voor die waarden van p.

3pt (c) Stel een integraal op voor het volume van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van f **rond de y-as** te wentelen. U hoeft deze integraal niet uit te rekenen.

Antwoord:

(a) De afgeleide is $f'(x) = -\frac{p}{(1+x)^{p+1}}$. Voor $x = a$ geldt

$$f(a) = \frac{1}{(1+a)^p} \quad \text{en} \quad f'(a) = -\frac{p}{(1+a)^{p+1}}.$$

De vergelijking van de raaklijn is in het algemeen

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

en dat wordt dus in dit geval

$$y = \frac{1}{(1+a)^p} - \frac{p}{(1+a)^{p+1}}(x-a). \tag{1}$$

Het snijpunt met de y-as krijgen we door $x = 0$ in te vullen. Dit levert

$$y = \frac{1}{(1+a)^p} - \frac{p}{(1+a)^{p+1}}(-a) = \frac{1+a+ap}{(1+a)^{p+1}}.$$

Het snijpunt met de y-as is dus $\boxed{(0, \frac{1+a+ap}{(1+a)^{p+1}})}$

Het snijpunt met de x-as krijgen we door $y = 0$ in te vullen in (1). Dan is

$$0 = \frac{1}{(1+a)^p} - \frac{p}{(1+a)^{p+1}}(x-a)$$

oftewel

$$\frac{p}{(1+a)^{p+1}}(x-a) = \frac{1}{(1+a)^p}.$$

Als we dit oplossen naar x vinden we

$$x = a + \frac{(1+a)^{p+1}}{p}\frac{1}{(1+a)^p} = a + \frac{1+a}{p} = \frac{1+a+ap}{p}.$$

Het snijpunt met de x-as is bijgevolg $\boxed{(\frac{1+a+ap}{p}, 0)}$

(b) De integraal wordt

$$\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^{2p}}\,dx \tag{2}$$

hetgeen een oneigenlijke integraal is.

We nemen $b > 0$ en berekenen eerst de integraal over het interval $[0, b]$. De onbepaalde integraal is

$$\int (1+x)^{-2p}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-2p}(1+x)^{1-2p} + C & \text{als } p \neq \frac{1}{2}, \\ \ln(1+x) + C & \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{(1+x)^{2p}}\,dx &= \left[\frac{1}{1-2p}(1+x)^{1-2p}\right]_0^b \\ &= \frac{1}{1-2p}\left((1+b)^{1-2p} - 1\right) \qquad \text{als } p \neq \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3}$$

en

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{(1+x)^{2p}}\,dx &= [\ln(1+x)]_0^b \\ &= \ln(1+b) \qquad \text{als } p = \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Voor de oneigenlijke integraal moeten we de limiet nemen voor $b \to +\infty$. Er geldt $\lim\limits_{b \to +\infty} \ln(1+b) = +\infty$ en dus volgt uit (4) dat de integraal divergent is voor $p = \frac{1}{2}$.

Verder geldt

$$\lim_{b \to \infty} (1+b)^{1-2p} = \begin{cases} +\infty & \text{als } 1-2p > 0, \quad \text{d.w.z. als } p < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{als } 1-2p < 0, \quad \text{d.w.z. als } p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Uit (3) volgt dus dat de integraal divergent is voor $p < \frac{1}{2}$ en convergent is voor $p > \frac{1}{2}$ met waarde

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^{2p}} dx &= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-2p} \left((1+b)^{1-2p} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1-2p} (0-1) \\ &= \frac{1}{2p-1} \qquad \text{als } p > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Merk op dat dit strikt positief is omdat $p > \frac{1}{2}$.

In (2) is er nog een factor π, zodat het eindantwoord is

$$\pi \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^{2p}} dx = \frac{\pi}{2p-1} \qquad \text{als } p > \frac{1}{2}$$

en de integraal is divergent als $p \leq \frac{1}{2}$.

(c) Als $y = f(x) = \frac{1}{(1+x)^p}$ dan is $\frac{1}{y} = (1+x)^p$ en $\frac{1}{y^{1/p}} = 1 + x$. Dit betekent dat

$$x = \frac{1}{y^{1/p}} - 1.$$

Als x varieert van 0 tot ∞, dan daalt y van 1 naar 0. De grafiek van f wordt dus ook beschreven door

$$x = \frac{1}{y^{1/p}} - 1, \qquad 0 < y \leq 1.$$

Als we de grafiek wentelen rond de y-as bekomen we de inhoud

$$\pi \int_0^1 \left[\frac{1}{y^{1/p}} - 1 \right]^2 dy$$

hetgeen dezelfde formule is als gegeven in de opgave, maar nu met de rollen van x en y verwisseld.

Vraag 2 Naam aan dat $a_0, a_1, a_2, \cdots$ een rij van getallen is waarvoor geldt $a_0 = 1$ en

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right) \tag{5}$$

voor $n \geq 1$. Bewijs met volledige inductie dat $1 \leq a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Zoals elk bewijs met volledige inductie moet het bewijs bestaan uit

(3pt) Basisstap

(6pt) Inductiestap

(1pt) Conclusie

Antwoord:

Basisstap: Voor $n = 0$ is gegeven dat $a_0 = 1$ en het is dan duidelijk dat $1 \leq a_n \leq 2$ juist is voor $n = 0$.

Inductiestap: Neem $k \in \mathbb{N}$ en veronderstel dat de bewering juist is voor $n = k$. Dus we veronderstellen dat $1 \leq a_k \leq 2$ juist is.

We bekijken $k+1$. De formule (5) is geldig voor $n = k+1$ want $k+1 \geq 1$. Dus

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) = \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} \tag{6}$$

Omdat $1 \leq a_k \leq 2$, geldt

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_k}{2} \leq 1 \quad \text{en} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_k} \leq 1.$$

Dus beide getallen $\frac{a_k}{2}$ en $\frac{1}{a_k}$ liggen tussen $\frac{1}{2}$ en 1. Dan ligt hun som tussen 1 en 2. Met andere woorden

$$1 \leq \frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k} \leq 2.$$

Vanwege (6) kunnen we concluderen dat

$$1 \leq a_{k+1} \leq 2$$

en we hebben laten zien dat de bewering juist is voor $n = k + 1$.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap allebei bewezen zijn is de bewering juist voor elke $n \in \mathbb{N}$, vanwege het principe van volledige inductie.

Vraag 3 Beschouw de functie

$$f(x) = \int_0^x \frac{(1-t)}{1+t}\cos(\pi t)\,dt$$

4pt (a) Toon aan dat f een lokaal minimum aanneemt in $x = 1$.

3pt (b) Benader de waarde van het lokale minimum met behulp van de trapeziumregel T_4.

3pt (c) Bereken de tweedegraads Taylorveelterm van $f(x)$ rond het punt $x = 0$.

Antwoord:

(a) Vanwege de hoofdstelling van de integraalrekening geldt

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x}\cos(\pi x).$$

Het is duidelijk dat $f'(1) = 0$. De afgeleide is ook 0 als $\cos(\pi x)$ en dit gebeurt voor $x = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{3}{2}$ (en ook voor elk getal van de vorm $x = \frac{1}{2} + k$ met $k \in \mathbb{Z}$, maar we zijn nu alleen geïnteresseerd in het gedrag rond $x = 1$)

Door geschikte waarden voor x in te vullen vinden we het volgende tekenverloop voor $f'(x)$ tussen $x = \frac{1}{2}$ en $x = \frac{3}{2}$.

x	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

De afgeleide is negatief op het interval $[\frac{1}{2}, 1]$ en bijgevolg daalt f op dat interval. De afgeleide is positief op het interval $[1, \frac{3}{2}]$, zodat f stijgt op dat interval.

In $x = 1$ gaat de functie over van dalen naar stijgen en f bereikt bijgevolg in $x = 1$ een lokaal minimum.

Opmerking: Je mag dit ook doen met de tweede afgeleide test. De tweede afgeleide is

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}\cos(\pi x) - \pi\frac{1-x}{1+x}\sin(\pi x)$$

en voor $x = 1$ is dit (want $\cos(\pi) = -1$ en $\sin(\pi) = 0$)

$$f''(1) = -\frac{2}{4}\cdot(-1) = \frac{1}{2}.$$

De tweede afgeleide is strikt positief en bijgevolg is er in $x = 1$ een lokaal minimum.

(b) We willen de volgende integraal benaderen

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\cos(\pi t)\,dt.$$

We stellen

$$g(t) = \frac{1-t}{1+t}\cos(\pi t).$$

De benadering met de trapeziumregel T_4 wordt dan

$$T_4 = \frac{1}{8}\left[g(0) + 2g(\tfrac{1}{4}) + 2g(\tfrac{1}{2}) + 2g(\tfrac{3}{4}) + g(1)\right]. \tag{7}$$

We berekenen

$$\begin{aligned}
g(0) &= \cos(0) = 1\\
g(\tfrac{1}{4}) &= \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\cos(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{10}\sqrt{2}\\
g(\tfrac{1}{2}) &= \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{3}\cdot 0 = 0\\
g(\tfrac{3}{4}) &= \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}\cos(\tfrac{3\pi}{4}) = \frac{1}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\frac{1}{14}\sqrt{2}\\
g(1) &= 0
\end{aligned}$$

Dit gebruiken we in (7) en er volgt

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{1}{8}\left[1 + \frac{3}{5}\sqrt{2} + 0 - \frac{1}{7}\sqrt{2} + 0\right]\\
&= \frac{1}{8}\left[1 + \frac{16}{35}\sqrt{2}\right]\\
&= \frac{1}{8} + \frac{2}{35}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Opmerking: De benadering T_4 is gelijk aan $T_4 = 0.20581\cdots$, hetgeen een redelijke benadering is voor de echte waarde van de integraal

$$\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\cos(\pi t)\,dt = 0.1924571476\cdots$$

(c) In (a) hadden we al gezien dat

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x}\cos(\pi x) \tag{8}$$

De tweede afgeleide kunnen we dan ook uitrekenen. We gebruiken de productregel en de quotiëntregel voor afgeleiden en we bekomen na enig rekenwerk

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x)^2}\cos(\pi x) - \pi\frac{1-x}{1+x}\sin(\pi x) \tag{9}$$

Nu gaan we $x = 0$ invullen. Als we $x = 0$ invullen in de functie $f(x)$ zelf, dan krijgen we een integraal van 0 naar 0, die gelijk is aan 0. Dus

$$f(0) = 0.$$

Als we $x = 0$ invullen in (8) en (9) dan volgt omdat $\cos(0) = 1$ en $\sin(0) = 0$ dat

$$f'(0) = 1 \qquad \text{en} \qquad f''(0) = -2$$

De gevraagde Taylorveelterm van graad 2 wordt nu

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 0 + x + \frac{-2}{2}x^2 = x - x^2.$$