

Tussentijdse Toets Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie, Informatica,
Schakelprogramma Master Toegepaste Informatica,
Master Chemie
donderdag 3 november 2016, 11:00-13:00 uur

G.00.01 Biochemie & Biotechnologie, Chemie, Geografie

K.00.07 Geologie, Informatica, Schakelprogramma's

Naam:

Studierichting:

Naam assistent:

(Assistenten zijn: Niels Bonneux, Stijn Cambie, Simon Dirckx, Jonas Kaerts, Leslie Molag, Melissa Nys, Dina Vanpaemel, Christine Verbeke, Benjamin Vermeir)

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent
- Succes!

Vraag 1 We beschouwen de functie

$$f(x) = x \operatorname{bgtan}(\sqrt{3} + \sin(x)).$$

- (a) Bereken $f'(x)$.
- (b) Bepaal de tweedegraads Taylorveelterm van f rond $x = 0$.
[U mag gebruiken dat $\operatorname{bgtan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.]
- (c) Geef alle $x_0 > 0$ waarvoor geldt dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(x_0, f(x_0))$, door de oorsprong gaat.

Antwoord:

- (a) De afgeleide van f berekenen we met de product- en kettingregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{bgtan}(\sqrt{3} + \sin(x)) + x \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2} \cdot \cos(x) \\ &= \operatorname{bgtan}(\sqrt{3} + \sin(x)) + \frac{x \cos(x)}{1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2}. \end{aligned}$$

- (b) Voor de tweedegraads Taylorveelterm van f hebben we $f'(x)$ en $f''(x)$ nodig. We berekenen eerst $f''(x)$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)}{1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2} + \frac{(\cos(x) - x \sin(x))(1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2)}{(1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2)^2} \\ &\quad - \frac{2x \cos(x)(\sqrt{3} + \sin(x)) \cos(x)}{(1 + (\sqrt{3} + \sin(x))^2)^2}. \end{aligned}$$

Door $x = 0$ in te vullen in $f(x)$, $f'(x)$ en $f''(x)$ vinden we dat $f(0) = 0$, $f'(0) = \frac{\pi}{3}$ en dat $f''(0) = \frac{1}{2}$.

Met deze informatie kunnen we de Taylorveelterm berekenen. Deze wordt

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\ &= \frac{\pi}{3}x + \frac{1}{4}x^2. \end{aligned}$$

- (c) De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van f in het gegeven punt $(x_0, f(x_0))$ is

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Als deze rechte door de oorsprong gaat, moet het punt $(0, 0)$ op de rechte liggen. Daarom moet dus

$$-f(x_0) = -f'(x_0)x_0$$

of met andere woorden

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0.$$

We gebruiken nu de voorschriften voor f en f' . De gelijkheid wordt nu

$$x_0 \operatorname{bgtan}(\sqrt{3} + \sin(x_0)) = x_0 \operatorname{bgtan}(\sqrt{3} + \sin(x_0)) + \frac{x_0^2 \cos(x_0)}{1 + (\sqrt{3} + \sin(x_0))^2}.$$

Door aan beide leden de term met de boogtangens te schrappen verkrijgen we

$$\frac{x_0^2 \cos(x_0)}{1 + (\sqrt{3} + \sin(x_0))^2} = 0$$

en deze breuk is gelijk aan nul als en slechts als $x_0^2 \cos(x_0)$ gelijk is aan nul. Ofwel is dus $x_0 = 0$ ofwel is $\cos(x_0) = 0$. Omdat we uit de opgave halen dat $x_0 > 0$, blijft enkel de voorwaarde $\cos(x_0) = 0$ over. De gezochte waarden voor x_0 zijn dus

$$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

met $k \in \mathbb{N}$.

Vraag 2 (a) Splits $\frac{x(3x+5)}{(x+1)(x+2)}$ in partieelbreuken.

(b) Bepaal $C > 0$ zodanig dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = C \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

geldt voor $n = 1$.

(c) Neem de constante C uit onderdeel (b) en bewijs met volledige inductie dat de gelijkheid (1) geldt voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$.

Antwoord:

(a) Omdat de graad van de teller en van de noemer gelijk zijn, moeten we eerst de Euclidische deling van $3x^2 + 5x$ door $x^2 + 3x + 2$ uitvoeren. We vinden dat

$$3x^2 + 5x = 3(x^2 + 3x + 2) + (-4x - 6).$$

We splitsen nu dus de rationale functie

$$\frac{-4x - 6}{(x+1)(x+2)}$$

in partieelbreuken. We zoeken dus getallen A en B zodat

$$\begin{aligned} \frac{-4x - 6}{(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \\ &= \frac{Ax + 2A + Bx + B}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B)x + (2A+B)}{(x+1)(x+2)}. \end{aligned}$$

Door de teller van deze breuk gelijk te stellen aan $-4x - 6$ komen we uit op het stelsel

$$\begin{cases} A + B &= -4 \\ 2A + B &= -6. \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is $A = -2$ en $B = -2$. De volledige splitsing in partieelbreuken is nu

$$\frac{x(3x+5)}{(x+1)(x+2)} = 3 + \frac{-2}{x+1} + \frac{-2}{x+2}.$$

(b) Als $n = 1$ bevat de som maar één term en wordt de gelijkheid

$$\frac{1}{3} = C \frac{8}{6}.$$

Deze gelijkheid klopt als C gelijk is aan $\frac{1}{4}$.

(c) We bewijzen de bewering per inductie

Basisstap: Het bewijs van de bewering voor $n = 1$ volgt uit het feit dat we C gelijk nemen aan $\frac{1}{4}$.

Inductiestap: Kies een willekeurig natuurlijk getal $j \geq 1$ en neem aan dat de bewering geldt voor j , met andere woorden

$$\sum_{k=1}^j \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{j(3j+5)}{(j+1)(j+2)}.$$

We bewijzen nu dat de bewering geldt voor $j+1$. We moeten dus laten zien dat

$$\sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(j+1)(3(j+1)+5)}{(j+2)(j+3)}.$$

We vertrekken hiervoor van het linkerlid en we vinden dat

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^j \frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{(j+1)(j+3)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{j(3j+5)}{(j+1)(j+2)} + \frac{1}{(j+1)(j+3)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{j(3j+5)(j+3) + 4(j+2)}{(j+1)(j+2)(j+3)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3j^3 + 14j^2 + 19j + 8}{(j+1)(j+2)(j+3)}. \end{aligned}$$

Nu is $j = -1$ een nulpunt van de teller. Door de teller te ontbinden in factoren vinden we dat

$$3j^3 + 14j^2 + 19j + 8 = (j+1)(3j^2 + 11j + 8) = (j+1)^2(3j+8).$$

We gaan nu verder met onze hoofdberekening. We hebben nu samenvattend

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3j^3 + 14j^2 + 19j + 8}{(j+1)(j+2)(j+3)} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(j+1)^2(3j+8)}{(j+1)(j+2)(j+3)} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(j+1)(3j+8)}{(j+2)(j+3)} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(j+1)(3(j+1)+5)}{(j+2)(j+3)}
 \end{aligned}$$

en dit is precies wat we wouden aantonen. Dit bewijst de inductiestap.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn volgt uit het principe van volledige inductie dat voor ieder natuurlijk getal $n \geq 1$ de gelijkheid

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{4} \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$$

opgaat.

Vraag 3 De kromme K wordt in poolcoördinaten gegeven door

$$r = 2 \cos(\theta), \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

- (a) Schets K .
- (b) Bereken het punt van K waarvan de y -coördinaat maximaal is.
- (c) Bereken de snijpunten van K met de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$.

Antwoord:

- (a) De kromme is de cirkel met middelpunt $(1, 0)$ en straal 1.
- (b) We schrijven het voorschrift van de kromme eerst in cartesische vorm.
Omdat $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ en omdat $\cos \theta = \frac{x}{r}$ komen we tot de vergelijking

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Deze vergelijking is te herschrijven als volgt

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} &= 2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

We zoeken het punt op de kromme waarvoor y maximaal is. We maximaliseren dus de functie

$$y = f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}.$$

De afgeleide van f is

$$f'(x) = \frac{-(x - 1)}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}}$$

en deze afgeleide is nul als en slechts als $x = 1$. Hierbij hoort het punt $y = 1$.

- (c) De eenheidscirkel heeft in poolcoördinaten de vergelijking $r = 1$. Het zoeken van de snijpunten komt dus neer op het oplossen van de vergelijking

$$1 = 2 \cos \theta.$$

De oplossingen bestaan uit de hoeken waarvan de cosinus gelijk is aan $1/2$. Omdat $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ vinden we de twee oplossingen

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad \text{en} \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

In cartesische coördinaten vinden we de twee oplossingen

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{en} \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$