Wiskunde I - proefexamen - modeloplossing

Vraag 1 Zij $f(x) = -\ln(2+3x)$

(a) Bewijs met volledige inductie dat voor elke $n \geq 1$ de $n$de afgeleide van f gelijk is aan

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \left(\frac{-3}{2+3x}\right)^n (n-1)!$$

(b) Bepaal de derdegraads Taylorveelterm van f rond $x = 1$.

Antwoord:

(a) **Basisstap:** We bewijzen de uitspraak voor $n = 1$.
Het linkerlid is

$$\frac{d}{dx} f(x) = -\frac{3}{2+3x}.$$

Het rechterlid is

$$\left(\frac{-3}{2+3x}\right)^1 (1-1)! = \left(\frac{-3}{2+3x}\right).$$

Het linkerlid is gelijk aan het rechterlid, dus de basisstap is bewezen.

Inductiestap:
Inductiehypothese: Neem een willekeurige $m \in \mathbb{N}_0$ en veronderstel dat de uitspraak waar is, d.w.z.:

$$\frac{d^m}{dx^m} f(x) = \left(\frac{-3}{2+3x}\right)^m (m-1)!$$

Te bewijzen: We bewijzen de uitspraak voor $m + 1$, d.w.z.

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) = \left(\frac{-3}{2+3x}\right)^{m+1} m!$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m}{dx^m} f(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{-3}{2+3x}\right)^m (m-1)!\right) && \text{Inductiehypothese} \\
&= (m-1)!(-3)^m \frac{d}{dx}(2+3x)^{-m} \\
&= (m-1)!(-3)^m(-m)(2+3x)^{-m-1}3 \\
&= m!(-3)^{m+1}\frac{1}{(2+3x)^{m+1}} \\
&= \left(\frac{-3}{2+3x}\right)^{m+1} m!
\end{aligned}$$

Conclusie: Omdat de basisstap bewezen is voor $n = 1$ en de inductiestap bewezen is, volgt dat

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \left(\frac{-3}{2+3x}\right)^n (n-1)!$$

voor elke $n \geq 1$ wegens het principe van volledige inductie.

(b) We berekenen eerst de nulde t.e.m. de derde afgeleide van f in $x = 1$. Voor de eerste, tweede en derde afgeleide gebruiken we deelvraag (a). De nulde afgeleide is voldoet niet aan de formule uit (a), maar is gelijk aan de functie zelf :

n	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$\frac{d^n}{dx^n} f(1)$
0	$-\ln(2+3x)$	$-\ln 5$
1	$\frac{-3}{2+3x}$	$-\frac{3}{5}$
2	$\frac{9}{(2+3x)^2}$	$\frac{9}{25}$
3	$\frac{-27}{(2+3x)^3} \cdot 2$	$-\frac{54}{125}$

Dus de Taylorveelterm van graad 3 rond $x = 1$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
t_3(x) &= -\ln 5 - \frac{3}{5}(x-1) + \frac{9}{25 \cdot 2!}(x-1)^2 - \frac{54}{125 \cdot 3!}(x-1)^3 \\
&= -\ln 5 - \frac{3}{5}(x-1) + \frac{9}{50}(x-1)^2 - \frac{9}{125}(x-1)^3
\end{aligned}$$

Vraag 2 We nemen $\rho > 0$. De kromme K_ρ wordt in poolcoördinaten gegeven door

$$r = 2\rho \sin \tfrac{\theta}{2}, \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(a) Schets K_ρ voor de waarde $\rho = 2$.

(b) Laat zien dat de afstand van een punt op K_ρ tot $(-1, 0)$ gegeven wordt door

$$F(\theta) = \sqrt{2\rho^2 - 2\rho^2 \cos\theta + 1 + 4\rho \sin\tfrac{\theta}{2}\cos\theta}, \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

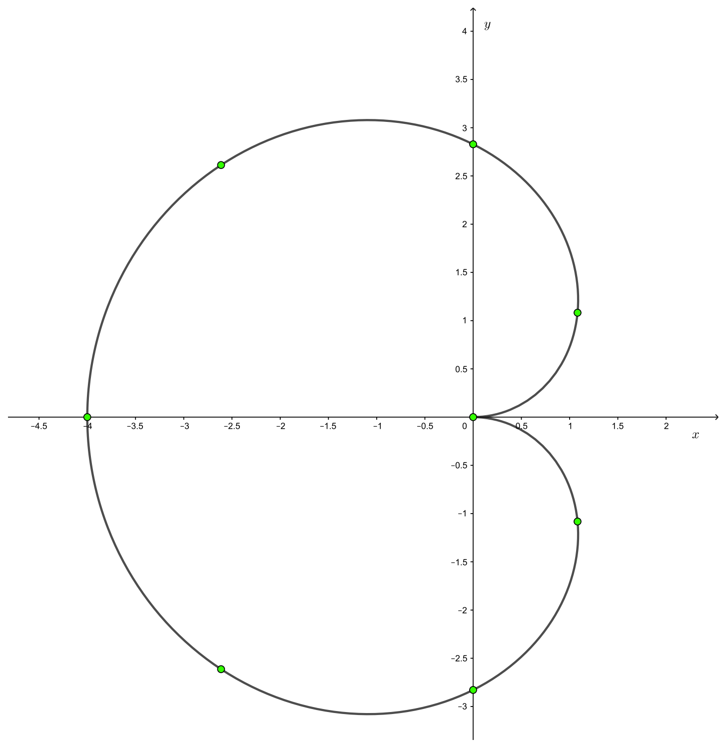
(c) Voor welke $\rho > 0$ bereikt $F(\theta)$ als functie van θ een lokaal maximum bij de waarde $\theta = \dfrac{\pi}{2}$?

Antwoord:

(a) We berekenen voor enkele waarden van θ de bijbehorende waarde van r:

θ	$r = 4\sin\frac{\theta}{2}$
0	$4\sin 0 = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$4\sin\frac{\pi}{8} \approx 1,53$
$\frac{\pi}{2}$	$4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$
$\frac{3\pi}{4}$	$4\sin\frac{3\pi}{8} \approx 3,7$
π	$4\sin\frac{\pi}{2} = 4$
$\frac{5\pi}{4}$	$4\sin\frac{5\pi}{8} \approx 3,7$
$\frac{3\pi}{2}$	$4\sin\frac{3\pi}{4} 2\sqrt{2} \approx 2,83$
$\frac{7\pi}{4}$	$4\sin\frac{7\pi}{8} \approx 1,53$
2π	$4\sin\pi = 0$

We plotten de punten met bovenstaande poolcoördinaten in het xy-vlak en schetsen de kromme door deze punten.



(b) Een punt op de kromme K_ρ heeft coördinaten $\left(2\rho \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, 2\rho\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)$.
We gebruiken de afstandsformule:

$$\sqrt{\left(2\rho\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+1\right)^2+\left(2\rho\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)^2}$$

$$=\sqrt{4\rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\theta+4\rho\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+1+4\rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{4\rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}+4\rho\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+1}$$

$$p.54 : \cos 2x = 1-2\sin^2 x$$

$$=\sqrt{2\rho^2(1-\cos\theta)+4\rho\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta+1}$$

$$=\sqrt{2\rho^2-2\rho^2\cos\theta+1+4\rho\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta}$$

(c) We willen dat de functie F maximaal is. Omdat $F(\theta)$ gelijk is aan een afstand tussen twee punten, blijven de extrema op dezelfde positie liggen als we F kwadrateren. We zullen dus onderzoeken voor welke $\rho > 0$ de functie met voorschrift

$$G(\theta) = 2\rho^2 - 2\rho^2 \cos\theta + 1 + 4\rho \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$$

maximaal is bij $\theta = \frac{\pi}{2}$. Dit wil zeggen dat $\theta = \frac{\pi}{2}$ een stationair punt is van $G(\theta)$.

$$\begin{aligned}(G(\theta))' &= (2\rho^2 - 2\rho^2 \cos\theta + 1 + 4\rho \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta)' \\ &= 2\rho^2 \sin\theta + 4\rho\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta - \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)\end{aligned}$$

We vullen $\theta = \frac{\pi}{2}$ in en stellen dit gelijk aan 0:

$$\begin{aligned}2\rho^2 \sin\frac{\pi}{2} + 4\rho\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) &= 2\rho^2 - 4\rho\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2\rho(\rho - \sqrt{2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $\rho = 0$ of $\rho = \sqrt{2}$. Echter, de oplossing $\rho = 0$ kunnen we uitsluiten, want in de opgave wordt gegeven dat $\rho > 0$.

Bereikt de functie G nu effectief een maximum in $\theta = \frac{\pi}{2}$ als $\rho = \sqrt{2}$? Het opstellen van een tabel waarin het stijgen en dalen van G samengevat wordt, is in deze oefening lastig. Daarom gebruiken we de tweede afgeleide test. Merk op, we vervangen alvast ρ door $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}(G(\theta))'' &= \left(4\sin\theta + 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta - \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)\right)' \\ &= 4\cos\theta + 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta - \sin\frac{\theta}{2}\cos\theta\right) \\ &= 4\cos\theta + 4\sqrt{2}\left(-\frac{5}{4}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right)\end{aligned}$$

We vullen het stationaire punt $\theta = \frac{\pi}{2}$ in:

$$\begin{aligned}
(G(\pi/2))'' &= 4\cos\frac{\pi}{2} + 4\sqrt{2}\left(-\frac{5}{4}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= -4\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -4 < 0
\end{aligned}$$

Omdat $(G(\pi/2))'' < 0$ bereikt de afstand een lokaal maximum in $\frac{\pi}{2}$ wanneer $\rho = \sqrt{2}$.