**Tussentijdse Toets Wiskunde I**
**1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie, Geografie, Geologie, Informatica, Schakelprogramma Master Toegepaste Informatica, Master Chemie**
**tijdens oefenzitting in week 7, 5-9 november 2018**

**Naam:**

**Studierichting:**

**Naam assistent:**

(Assistenten zijn: Michael Geeraerts, Arne Hostens, Jonas Kaerts, Irene Maes, Melissa Nys, Conor O'Rourke, Bram Verjans, Lise Wouters)

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent
- Succes!

**Vraag 1** Neem aan dat $a_0, a_1, a_2, \ldots$ een rij van getallen is waarvoor geldt dat $a_0 = 1$ en

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}.$$

Bewijs met volledige inductie dat $1 \leq a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

**Antwoord:**

**Basisstap:** We laten eerst zien dat de uitspraak geldt voor $n = 0$. In dat geval moeten we bewijzen dat $1 \leq a_0 \leq 2$. Aangezien $a_0 = 1$, is hieraan voldaan.

**Inductiestap:** Kies een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ en neem aan dat de uitspraak geldt voor $k$, met andere woorden

$$1 \leq a_k \leq 2.$$

We laten nu zien dat de uitspraak ook geldt voor $k + 1$, d.w.z.

$$1 \leq a_{k+1} \leq 2.$$

Wegens de inductiehypothese is $1 \leq a_k \leq 2$. Daarom zal

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_k} \leq \frac{1}{1}$$

zodat

$$1 \leq \frac{2}{a_k} \leq 2.$$

Door de ongelijkheden voor $a_k$ en $2/a_k$ op te tellen, vinden we

$$2 \leq a_k + \frac{2}{a_k} \leq 4$$

zodat tenslotte

$$1 \leq \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right) \leq 2.$$

Het is gegeven dat

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right),$$

dus dit beëindigt het bewijs.

**Conclusie:** Omdat de basisstap en de inductiestap zijn bewezen, volgt uit het principe van volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq a_n \leq 2.$$

**Vraag 2** (a) Splits $f(x) = \dfrac{1}{1+2x-3x^2}$ in partieelbreuken.

(b) Bereken de derdegraads Taylorveelterm van $f$ rond $x = 0$.

Hint bij (b): het is handig om de splitsing in partieelbreuken te gebruiken.

**Antwoord:**

(a) De noemer heeft nulpunten in $x = 1$ en $x = -\frac{1}{3}$. We kunnen de noemer dus splitsen in factoren:

$$-3x^2 + 2x + 1 = 3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right) = (x-1)(3x+1).$$

Om $f(x)$ te splitsen in partieelbreuken, zoeken we getallen $A$ en $B$ zodat

$$\frac{1}{1+2x-3x^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x+1} = \frac{3Ax + A + Bx - B}{1+2x-3x^2}.$$

Uit deze gelijkheid halen we het stelsel

$$\begin{cases} 3A + B & = 0 \\ A - B & = 1. \end{cases}$$

De oplossing van dit stelsel is $A = -1/4$ en $B = 3/4$. De splitsing in partieelbreuken is dus gegeven door

$$\frac{1}{1+2x-3x^2} = \frac{-1}{4(x-1)} + \frac{3}{4(3x+1)}.$$

(b) Om de derdegraads Taylorveelterm van $f$ rond $x = 0$ te berekenen, hebben we de eerste drie afgeleiden van $f$ nodig. We vinden zo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{-1}{4}(x-1)^{-1} + \frac{3}{4}(3x+1)^{-1}, & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{4}(x-1)^{-2} + \frac{-9}{4}(3x+1)^{-2}, & f'(0) &= -2 \\
f''(x) &= \frac{-2}{4}(x-1)^{-3} + \frac{54}{4}(3x+1)^{-3}, & f''(0) &= 14 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{6}{4}(x-1)^{-4} + \frac{-486}{4}(3x+1)^{-4}, & f^{(3)}(0) &= -120.
\end{aligned}$$

De derdegraads Taylorveelterm is zo

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 \\ &= 1 - 2x + 7x^2 - 20x^3. \end{aligned}$$

**Vraag 3** De kromme $K$ wordt in poolcoördinaten gegeven door

$$r = \sin(\theta) + 1, \qquad \theta \in [0, \pi]$$

(a) Schets $K$ in het $xy$-vlak.

(b) Bepaal het punt van $K$ waarvan de $x$-coördinaat maximaal is.

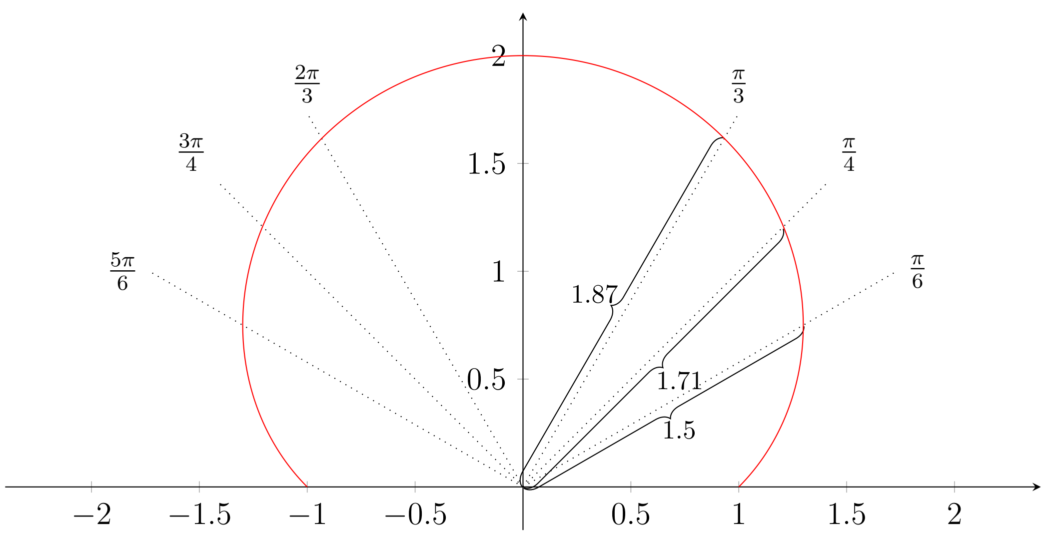
Hint bij (b): herinner u dat $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

**Antwoord:**

(a) We berekenen eerst in het interval $[0, \pi]$ voor een aantal hoeken $\theta$ de bijhorende waarde van $r$. Zo vinden we (na afronding op twee cijfers na de komma)

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ (exact) | 1 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ | 2 | $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ | $\frac{3}{2}$ | 1 |
| $r$ (afgerond) | 1 | 1.5 | 1.71 | 1.87 | 2 | 1.87 | 1.71 | 1.5 | 1 |

De kromme zelf heeft dus volgende vorm:



(b) **Modeloplossing 1**

We willen de $x$-coördinaat maximaliseren. In poolcoördinaten komt dit neer op het maximaliseren van $r\cos(\theta)$. Omdat op de kromme geldt dat $r = \sin(\theta) + 1$, moeten we dus het maximum zoeken van de functie

$$f(\theta) = (\sin(\theta) + 1)\cos(\theta).$$

De afgeleide van $f$ is gegeven door

$$f'(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) - \sin(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) - \sin(\theta).$$

Om de extrema van $f$ te vinden, moeten we de nulpunten vinden van $f'$. Hiervoor vervangen we eerst $\sin(\theta)$ door $u$ en zoeken we de waarden van $u$ waarvoor

$$-2u^2 - u + 1 = 0.$$

De nulpunten van deze tweedegraadsveelterm zijn $u = -1$ en $u = \frac{1}{2}$. Bijgevolg moet $\sin(\theta) = -1$ of $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. In het interval $[0, \pi]$ heeft enkel deze tweede vergelijking oplossingen, namelijk $\theta = \frac{\pi}{6}$ en $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

We onderzoeken nu waar het globale maximum bereikt wordt.

- **Optie 1:**

  We berekenen

$$f'(0) = 1 - 2\sin^2(0) - \sin(0) = 1 > 0,$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 - 1 = -2 < 0$$

  en

$$f'(\pi) = 1 - 2\sin^2(\pi) - \sin(\pi) = 1 > 0.$$

  We vatten dit nu samen in een tabel:

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{5\pi}{6}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |
| $f(\theta)$ | randmin. | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | min. | $\nearrow$ | randmax. |

- **Optie 2:** Tweede afgeleidetest

  De tweede afgeleide van $f$ is gegeven door

  $$f''(\theta) = -4\sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta).$$

  Na invullen zien we dat

  $$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx -2,6 < 0$$

  en dat

  $$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \approx 2,6 > 0.$$

  Bijgevolg bereikt $f$ in $\frac{\pi}{6}$ een lokaal maximum en in $\frac{5\pi}{6}$ een lokaal minimum. Hieruit volgt dan meteen dat er een randminimum moet zijn in $x = 0$ en een randmaximum in $x = \pi$.

Het $x$-coördinaat bereikt dus tweemaal een lokaal maximum. Omdat $[0, \pi]$ een gesloten en begrensd interval is, zal het globale maximum in één van deze $x$-waarden bereikt worden.
We evalueren $f$ in deze $x$-waarden:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{2} + 1\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,3$$

en

$$f(\pi) = (\sin\pi + 1)\cos\pi = -1.$$

Hieruit kunnen we besluiten dat het globale maximum bereikt wordt in $x = \frac{\pi}{6}$.
Deze $\theta$ correspondeert met het punt

$$(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \left(\sin\frac{\pi}{6} + 1\right)\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

**Modeloplossing 2**

We willen de $x$-coördinaat maximaliseren. Merk op dat voor $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ het $x$-coördinaat altijd positief is en voor $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ is het altijd negatief. Daarom zal de maximale waarde bereikt worden in dit eerste interval en mogen we ons dus beperken tot $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

We weten dat $x = r\cos(\theta)$. Omdat op de kromme geldt dat $r = \sin(\theta) + 1$, moeten we dus het maximum zoeken van de functie

$$f(\theta) = (\sin(\theta) + 1)\cos(\theta).$$

De afgeleide van $f$ is gegeven door

$$f'(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) - \sin(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta) - \sin(\theta).$$

Om de extrema van $f$ te vinden, moeten we de nulpunten vinden van $f'$. Hiervoor vervangen we eerst $\sin(\theta)$ door $u$ en zoeken we de waarden van $u$ waarvoor

$$-2u^2 - u + 1 = 0.$$

De nulpunten van deze tweedegraadsveelterm zijn $u = -1$ en $u = \frac{1}{2}$. Bijgevolg moet $\sin(\theta) = -1$ of $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$. In het interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ heeft enkel deze tweede vergelijking een oplossing, namelijk $\theta = \frac{\pi}{6}$.

We onderzoeken nu waar het globale maximum bereikt wordt.

- **Optie 1:**

  We berekenen

  $$f'(0) = 1 - 2\sin^2(0) - \sin(0) = 1 > 0,$$

  en

  $$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 2 - 1 = -2 < 0$$

  We vatten dit nu samen in een tabel:

| $\theta$ | $0$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ |
| $f(\theta)$ | randmin. | $\nearrow$ | max. | $\searrow$ | randmin. |

- **Optie 2:** Tweede afgeleidetest

  De tweede afgeleide van $f$ is gegeven door

  $$f''(\theta) = -4\sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta).$$

  Na invullen zien we dat

  $$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx -2,6 < 0.$$

  Bijgevolg bereikt $f$ in $\frac{\pi}{6}$ een lokaal maximum. Hieruit volgt dan meteen dat er randminima moet zijn in $x = 0$ en in $x = \frac{\pi}{2}$.

Het $x$-coördinaat bereikt dus eenmaal een lokaal maximum. Omdat $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ een gesloten en begrensd interval is, zal dit ook het globale maximum zijn.

Het $x$-coördinaat wordt dus maximaal bij $\theta = \frac{\pi}{6}$. Deze waarde van $\theta$ correspondeert met het punt

$$(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \left(\sin\frac{\pi}{6} + 1\right)\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right).$$