

Tussentijdse Toets Wiskunde I

Naam: _____

Studierichting: _____

Naam assistent: _____

(Assistenten zijn: Tey Berendschot, Aiko Blanckaert, Anthe Boden, Danté Brans, Bruno Deprez, Michael Geeraerts, Alan Groot, Joris Hermans, Arne Hostens, Stijn Meuwissen, Melissa Nys, Pieter Vanmechelen, Bram Verjans, Stephanie Vermeiren.)

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst. Alle vragen tellen even zwaar mee (10 punten).
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, symbolisch niet). Het rekenmachine mag gebruikt worden om rekenwerk te vereenvoudigen, maar tussenstappen moeten steeds opgeschreven worden.
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Succes!

Naam: _____

(5 pt) 1. (a) Druk het complex getal $(1+i)^{14}$ uit in de vorm $x+iy$, met x en y reële getallen.

(4 pt) (b) Zoek alle oplossingen van de vergelijking

$$z^{14} = (1+i)^{14}. \quad (1)$$

Geef de oplossingen in hun goniometrische vorm $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$.

(1 pt) (c) Hoeveel reële oplossingen zijn er?

Oplossing

1. (a) Deze vraag kan op verschillende manieren opgelost worden. Hieronder tonen we er drie. Belangrijk bij elk van de oplossingsmethoden is om je tussenstappen en berekeningen op te schrijven.

i. We berekenen eerst de goniometrische vorm van $1+i$. Stel $1+i = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Dan vinden we

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \text{ of } \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Merk op dat $1+i$ in het eerste kwadrant ligt waardoor $\theta = \frac{\pi}{4}$. Zo vinden we dat

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Om $(1+i)^{14}$ te berekenen gebruiken we de formule van de Moivre (p.71).

$$\begin{aligned} (1+i)^{14} &= \left(\sqrt{2}\right)^{14} \left(\cos\left(14 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(14 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= 128 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \right) \\ &= 128(0 + i(-1)) \\ &= -128i \end{aligned} \quad (2)$$

ii. We weten dat

$$\begin{aligned} (1+i)^{14} &= ((1+i)^2)^7 \\ &= (1+2i+i^2)^7 \\ &= (2i)^7 \\ &= -128i \end{aligned}$$

iii. De laatste oplossingsmethode maakt gebruik van het binomium van Newton.

$$\begin{aligned}
(1+i)^{14} &= \binom{0}{14} 1^0 i^{14} + \binom{1}{14} 1^1 i^{13} + \binom{2}{14} 1^2 i^{12} + \binom{3}{14} 1^3 i^{11} \\
&\quad + \binom{4}{14} 1^4 i^{10} + \binom{5}{14} 1^5 i^9 + \binom{6}{14} 1^6 i^8 + \binom{7}{14} 1^7 i^7 \\
&\quad + \binom{8}{14} 1^8 i^6 + \binom{9}{14} 1^9 i^5 + \binom{10}{14} 1^{10} i^4 + \binom{11}{14} 1^{11} i^3 \\
&\quad + \binom{12}{14} 1^{12} i^2 + \binom{13}{14} 1^{13} i + \binom{14}{14} 1^{14} i^0 \\
&= -1 + 14i + 91 - 364i - 1001 + 2002i + 3003 - 3432i \\
&\quad - 3003 + 2002i + 1001 - 364i - 91 + 14i + 1 \\
&= -128i
\end{aligned}$$

(b) Om alle oplossingen van $z^{14} = (1+i)^{14}$ te vinden, gaan we deze vergelijking omzetten naar hun goniometrische vorm. Met

$$z = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)),$$

en gebruikmakend van (2) kunnen we de vergelijking herschrijven. Hierbij gebruiken we voor het linkerlid opnieuw de formule van de Moivre.

$$(r_1)^{14}(\cos(14\theta_1) + i \sin(14\theta_1)) = 128 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \right)$$

Omdat linkerlid gelijk moet zijn aan het rechterlid gelden volgende gelijkheden:

$$\begin{cases} (r_1)^{14} = 128 \\ 14\theta_1 = \frac{7\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r_1 = \sqrt[14]{128} \\ \theta_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7} \end{cases}$$

met $k \in \mathbb{Z}$.

Zo vinden we 14 verschillende oplossingen

$$z = \sqrt[14]{128} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right) \right)$$

met $k = 0, 1, 2, \dots, 13$.

(c) Het antwoord op deze vraag kan je op verschillende manieren onderbouwen. We geven 3 mogelijke oplossingen.

i. Een oplossing van de vorm $x + iy$ is reëel als en slechts als $y = 0$. In deze vraag is $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right)$ (met $k = 0, 1, 2, \dots, 13$). Dan is

$$\begin{aligned}
y = 0 &\iff \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}\right) = 0 \\
\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7} &= a\pi \quad \text{met } a \in \mathbb{Z} \\
k &= 7a - \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

Wanneer k gelijk moet zijn aan bovenstaande uitdrukking, zal k nooit gelijk kunnen zijn aan $0, 1, 2, \dots, 13$ omdat $a \in \mathbb{Z}$. Hieruit kunnen we concluderen dat er geen enkele reële oplossing is.

- ii. We kunnen ook alle 14 oplossingen één voor één beschouwen en nagaan voor welke oplossingen $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{7}) = 0$ (met $k = 0, 1, 2, \dots, 13$). Hieruit zal je kunnen concluderen dat dit voor geen enkele waarde van k het geval is, waardoor er geen reële oplossingen zijn.
- iii. Stel dat z^* , een oplossing van vergelijking (1), reëel is. Dan moet $(z^*)^{14}$ ook reëel zijn, maar dit klopt niet want $(z^*)^{14} = -128i$ (zie 1(a)). Hieruit volgt dat vergelijking (1) geen reële oplossingen kan hebben.

Naam: _____

2. Zij λ een reëel getal.

(2 pt) (a) Bereken

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(\lambda x)$$

(de n -de afgeleide van de functie $f(x) = \sin(\lambda x)$) voor $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

(2 pt) (b) Vul volgende gelijkheden aan voor $n \geq 0$:

i. $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin(\lambda x) = \dots$

ii. $\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin(\lambda x) = \dots$

(4 pt) (c) Bewijs de gelijkheid gevonden in (b) i. voor alle natuurlijke getallen $n \geq 0$ door middel van volledige inductie.

Het resultaat gevonden in (b) ii. hoeft je niet te bewijzen.

(2 pt) (d) Vind de 7-de graads Taylorveelterm van $f(x) = \sin(\lambda x)$ rond $x = 0$.

Oplossing

2. (a) Bij het berekenen van de afgeleiden hieronder maken we gebruik van de kettingregel en de eigenschap

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right).$$

$$n = 0 \implies \frac{d^0}{dx^0} \sin(\lambda x) = \sin(\lambda x)$$

$$n = 1 \implies \frac{d}{dx} \sin(\lambda x) = \lambda \cos(\lambda x)$$

$$n = 2 \implies \frac{d^2}{dx^2} \sin(\lambda x) = \frac{d}{dx} (\lambda \cos(\lambda x)) = -\lambda^2 \sin(\lambda x)$$

$$n = 3 \implies \frac{d^3}{dx^3} \sin(\lambda x) = -\lambda^3 \cos(\lambda x)$$

$$n = 4 \implies \frac{d^4}{dx^4} \sin(\lambda x) = \lambda^4 \sin(\lambda x)$$

(b) i. Bij deze deelvraag zoeken we een patroon in de $2n$ -de orde afgeleiden van $\sin(\lambda x)$. Merk op dat de $2n$ -de orde afgeleiden alle afgeleiden zijn van een even orde. Om een patroon te vinden kijken we dus naar de nulde, tweede en vierde afgeleide van opgave 2(a) (zie $n = 0, 2, 4$). Zo kunnen we volgend patroon herkennen:

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \sin(\lambda x) = (-1)^n \lambda^{2n} \sin(\lambda x) \quad (3)$$

- ii. Op dezelfde manier kunnen we ook een patroon vinden voor de $(2n + 1)$ -de afgeleiden van $\sin(\lambda x)$. Gebruikmakend van 2(a) voor $n = 1, 3$ vinden we

$$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}} \sin(\lambda x) = (-1)^n \lambda^{2n+1} \cos(\lambda x)$$

- (c) We bewijzen bewering (3) voor $n \geq 0$ door middel van volledige inductie.

Basisstap: We bewijzen de uitspraak voor $n = 0$.

$$\begin{aligned} LL &= \frac{d^0}{dx^0} \sin(\lambda x) = \sin(\lambda x) \\ RL &= (-1)^0 \lambda^0 \sin(\lambda x) = \sin(\lambda x) \end{aligned}$$

Omdat $LL = RL$ is de basisstap aangetoond voor $n = 0$.

Inductiestap:

- *Inductiehypothese (IH):* Veronderstel dat voor een willekeurige $k \in \mathbb{N}$ geldt dat

$$\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \sin(\lambda x) = (-1)^k \lambda^{2k} \sin(\lambda x).$$

- *Te bewijzen:* De uitspraak is waar voor $n = k + 1$, namelijk

$$\frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}} \sin(\lambda x) = (-1)^{k+1} \lambda^{2(k+1)} \sin(\lambda x).$$

- *Bewijs:* We starten van het LL

$$\begin{aligned} \frac{d^{2(k+1)}}{dx^{2(k+1)}} \sin(\lambda x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^{2k}}{dx^{2k}} \sin(\lambda x) \right) \\ &= \frac{d^2}{dx^2} ((-1)^k \lambda^{2k} \sin(\lambda x)) \quad (\text{IH}) \\ &= \frac{d}{dx} ((-1)^k \lambda^{2k+1} \cos(\lambda x)) \\ &= (-1)^{k+1} \lambda^{2k+2} \sin(\lambda x) \end{aligned}$$

Conclusie: Omdat de basisstap is aangetoond en de inductiestap is bewezen, volgt het bewijs van uitspraak (3) uit het principe van volledige inductie.

3. Een 7-de graads Taylorveelterm is van de vorm

$$\begin{aligned} P_7(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7 \end{aligned}$$

Zij $f(x) = \sin(\lambda x)$, dan vinden we met behulp van deelvraag 2(a):

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lambda$$

$$f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(0) = -\lambda^3$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \lambda^5 \cos(\lambda x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = \lambda^5$$

$$f^{(6)}(x) = \lambda^6 \sin(\lambda x) \Rightarrow f^{(6)}(0) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -\lambda^7 \cos(\lambda x) \Rightarrow f^{(7)}(0) = -\lambda^7$$

Dit invullen in de uitdrukking voor $P_7(x)$ geeft:

$$P_7(x) = \lambda x - \frac{\lambda^3}{3!}x^3 + \frac{\lambda^5}{5!}x^5 - \frac{\lambda^7}{7!}x^7$$