

Vraag 2 Zij $c > 0$ vast en beschouw voor elke $p > 0$ de functie

$$f(x) = x^p e^{-cx} \quad \text{voor } x \geq 0.$$

(a) Laat zien dat de maximale waarde van f gelijk is aan

$$\max_{x \geq 0} f(x) = \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p}.$$

Wat is de minimale waarde van f ?

(b) Voor welke $p > 0$ is het maximum uit onderdeel (a) zo klein mogelijk?

[Hint bij (b): het kan handig zijn om logaritme te nemen.]

Antwoord:

(a) Voor f geldt dat $f(0) = 0$ en $f(x) > 0$ als $x > 0$. De minimale waarde van $f(x)$ voor $x \geq 0$ is dus gelijk aan 0 en de minimale waarde wordt bereikt bij $x = 0$.

Om het maximum van f te bepalen gaan we de afgeleide berekenen. Er geldt vanwege de productregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= px^{p-1}e^{-cx} - cx^p e^{-cx} \\ &= (p - cx)x^{p-1}e^{-cx}. \end{aligned}$$

Vanwege de factor $p - cx$ wordt de afgeleide nul bij $x = \frac{p}{c}$. De andere factoren zijn strikt positief voor $x > 0$. We hebben bijgevolg het volgende tekenverloop van $f'(x)$.

x	0	p/c	∞
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	stijgend		dalend

Uit het tekenverloop volgt dat f in $x = p/c$ een maximum bereikt. De maximale waarde is

$$f\left(\frac{p}{c}\right) = \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p}$$

zoals inderdaad in de vraag vermeld was. Het maximum is een globaal maximum.

(b) We willen het minimum van de functie

$$M(p) = \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p}, \quad \text{met } p > 0$$

bepalen.

De waarde van p waarvoor $M(p)$ minimaal is is dezelfde als de waarde van p waarvoor $\ln M(p)$ minimaal is.

Vanwege de rekenregels voor de logaritme geldt

$$\begin{aligned} \ln M(p) &= \ln \left(\frac{p}{c}\right)^p + \ln e^{-p} \\ &= p \ln \frac{p}{c} - p \\ &= p \ln p - p \ln c - p. \end{aligned}$$

De afgeleide van $\ln M(p)$ naar p is

$$\frac{d}{dp} \ln M(p) = \ln p + p \cdot \frac{1}{p} - \ln c - 1 = \ln p - \ln c.$$

Dit is nul voor $p = c$. Omdat $\ln$ een strikt stijgende functie is, hebben we het volgende tekenverloop

p	0	c	∞
$\frac{d}{dp} \ln M(p)$	—	0	+
$\ln M(p)$	dalend		stijgend

Uit het tekenverloop volgt dat $\ln M(p)$ een minimum bereikt bij $p = c$. Het minimum is een absoluut minimum.

Dan bereikt ook $M(p)$ een minimum bij $p = c$.

Zie volgend blad voor een antwoord op onderdeel (b) zonder logaritme te nemen.

(b-2) Onderdeel (b) kan ook opgelost worden zonder de logaritme te nemen.

Om $\left(\frac{p}{c}\right)^p$ te kunnen afleiden schrijven we schrijven eerst

$$M(p) = \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p} = e^{p \ln \frac{p}{c}} e^{-p}, \quad \text{met } p > 0$$

en vervolgens leiden we af

$$\begin{aligned} M'(p) &= e^{p \ln \frac{p}{c}} \left(\frac{d}{dp} p \ln \frac{p}{c} \right) e^{-p} + e^{p \ln \frac{p}{c}} (-e^{-p}) \\ &= \left(\frac{p}{c}\right)^p \left(\ln \frac{p}{c} + p \cdot \frac{1}{p/c} \cdot \frac{1}{c} \right) e^{-p} - \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p} \\ &= \left(\ln \frac{p}{c} + 1 - 1 \right) \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p} \\ &= \ln \frac{p}{c} \cdot \left(\frac{p}{c}\right)^p e^{-p} \end{aligned}$$

Vanwege de factor $\ln \frac{p}{c}$ is de afgeleide gelijk aan nul voor $p = c$. Deze factor is negatief voor $0 < p < c$ en positief voor $p > c$. De andere factoren zijn strikt positief. We vinden het volgende tekenverloop

p	0	c	∞
$M'(p)$	—	0	+
$M(p)$	dalend		stijgend

Bijgevolg bereikt $M(p)$ een minimum bij $p = c$. Het is een globaal minimum.