Tussentijdse Toets Wiskunde I
1ste bachelor Biochemie & Biotechnologie, Chemie,
Geografie, Geologie, Informatica,
Schakelprogramma Master Toegepaste Informatica,
donderdag 17 november 2011, 8:30–10:00 uur

Naam:

Studierichting:

Naam assistent:

(Assistenten zijn Sofie Burggraeve, Bart Jacobs, Annelies Jaspers, Nele Lejon, Daan Michiels, Michael Moreels, Berdien Peeters en Pieter Segaert).

- Deze toets is bedoeld om u vertrouwd te maken met de wijze van ondervraging op het examen en om te testen of u de stof die tot nu toe behandeld is voldoende beheerst. Alle vragen tellen even zwaar mee.
- U mag gebruik maken van de cursus Wiskunde I en van een rekenmachine (grafisch is toegestaan, een symbolisch niet).
- Schrijf de antwoorden duidelijk leesbaar op in goede Nederlandse zinnen. Begin het antwoord op elke vraag op een nieuw blad. Vermeld uw naam op elk blad.
- Vermeld op dit blad ook de naam van uw assistent
- Succes!

Naam: **Studierichting:**

Vraag 1 We beschouwen de functie

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(a) Laat zien dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(a, f(a))$ door de oorsprong gaat als en slechts als

$$a \tan a = 2 \tag{1}$$

(b) Voer één stap Newton-Raphson uit om een benadering van een oplossing van (1) te vinden, met beginwaarde $x_0 = 1$.

(c) Geef de Taylorveelterm van graad 2 van f rond $x = 0$.

(d) Gebruik (c) om de limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x^2}$$

te berekenen.

Antwoord

(a) De afgeleide van f is

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2(\cos x)^{3/2}}.$$

De vergelijking van de raaklijn aan de grafiek in het punt $(a, f(a))$ is

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) = \frac{1}{\sqrt{\cos a}} + \frac{\sin a}{2(\cos a)^{3/2}}(x - a). \tag{2}$$

De raaklijn gaat door de oorsprong als en slechts als $(x, y) = (0, 0)$ aan de vergelijking (2) voldoet. Dit betekent

$$0 = \frac{1}{\sqrt{\cos a}} + \frac{\sin a}{2(\cos a)^{3/2}}(0 - a),$$

ofwel, na vermenigvuldiging met $\sqrt{\cos a}$, dat

$$0 = 1 - a\frac{\sin a}{2 \cos a}$$

hetgeen inderdaad leidt tot (1), want $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$.

(b) Een oplossing van de vergelijking (1) is een nulpunt van de functie

$$g(a) = a \tan a - 2.$$

De Newton-Raphson iteratie voor de functie g luidt

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Er geldt

$$g'(a) = \tan a + a \left(1 + \tan^2(a)\right)$$

Omdat $x_0 = 1$ is $g(x_0) = g(1) = \tan 1 - 2 \approx -0,4426\cdots$ en $g'(x_0) = g'(1) = \tan 1 + 1 + \tan^2(a) \approx 4,983\cdots$. Dan is

$$x_1 = 1 - \frac{g(1)}{g'(1)} \approx 1 - \frac{-0,4426}{4,983} \approx 1.089$$

en dit is het resultaat van één stap Newton-Raphson iteratie.

(c) Er geldt $f(0) = 1$. We hebben al gezien dat

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2(\cos x)^{3/2}},$$

zodat $f'(0) = 0$. De tweede afgeleide van f is (vanwege de quotiëntregel voor afgeleiden)

$$f''(x) = \frac{\cos x \cdot (\cos x)^{3/2} - \sin x \cdot \frac{3}{2}(\cos x)^{1/2} \cdot (-\sin x)}{2(\cos x)^3}.$$

Voor $x = 0$ is $\sin x = 0$ en $\cos x = 1$. Bijgevolg is $f''(0) = \frac{1}{2}$. De Taylorveelterm van graad 2 rond $x = 0$ is dus

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + \frac{1}{4}x^2.$$

(d) Vanwege de Taylorveelterm uit onderdeel (c) is

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \cdots$$

waarin $\cdots$ staat voor hogere orde termen die sneller naar 0 gaan dan x^2 als $x \to 0$. Dus

$$\frac{f(x)-1}{x^2} = \frac{\frac{1}{4}x^2 + \cdots}{x^2} \approx \frac{1}{4} + \cdots$$

en

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-1}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Naam: **Studierichting:**

Vraag 2 (a) Schets de twee krommen die beschreven worden door de vergelijkingen $x^2y = x$ en $x^2 + 4y^2 = 4$ in één figuur.

(b) Geef alle oplossingen van het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x^2y = x \\ x^2 + 4y^2 = r^2 \end{cases}$$

Hierin is $r > 0$ een constante waarde.

(c) Hoeveel (reële) oplossingen heeft het stelsel uit (b) ? Uw antwoord hangt af van r.

Antwoord

(a) De vergelijking $x^2y = x$ betekent $x = 0$ of $xy = 1$. Hierin is $x = 0$ de vergelijking van de y-as, en $xy = 1$ is de vergelijking van een hyperbool.

Verder is $x^2 + 4y^2 = 4$ de vergelijking van een ellips, die gaat door de punten $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 1)$ en $(0, -1)$.

De krommen staan bijeen in de figuur op de volgende bladzijde. De ellips blijkt te raken aan de hyperbool. Dit is op dit moment nog niet duidelijk, maar dat zal volgen uit onderdeel (b).

(b) $x^2y = x$ betekent dat $x = 0$ of $xy = 1$.

Als we $x = 0$ invullen in de vergelijking $x^2 + 4y^2 = r^2$, dan vinden we $4y^2 = r^2$, waaruit volgt $y = \pm\frac{r}{2}$. Dit geeft al twee oplossingen, nl.

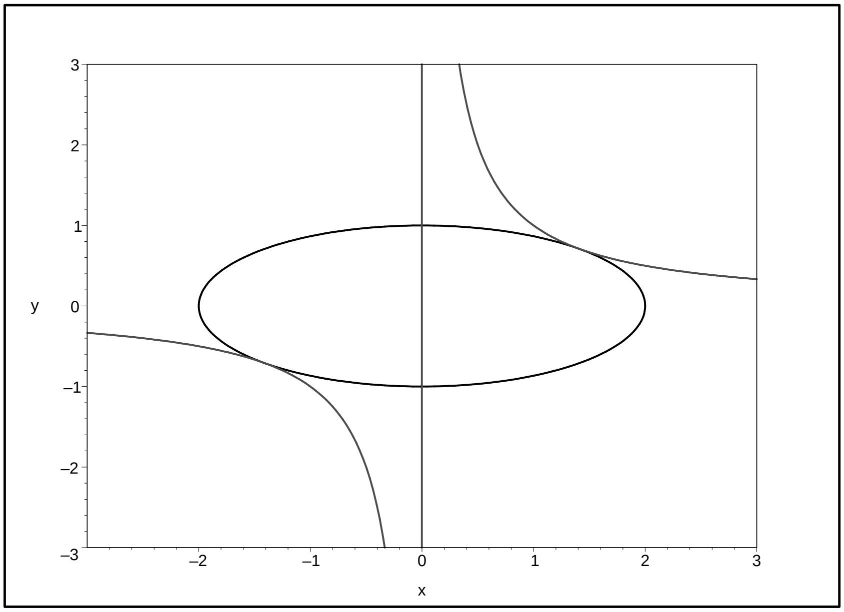
$$(0, \tfrac{r}{2}) \quad \text{en} \quad (0, -\tfrac{r}{2}). \tag{3}$$

Het andere geval is dat $xy = 1$. Dan is $y = 1/x$, en als we dit invullen in $x^2 + 4y^2 = r^2$, dan vinden we

$$x^2 + 4\frac{1}{x^2} = r^2.$$

Na vermenigvuldiging met x^2 vinden we de bikwadratische vergelijking

$$x^4 - r^2x^2 + 4 = 0.$$



Figuur 1: De krommen $x^2y = x$ en $x^2 + 4y^2 = 4$ in één figuur.

Stel $t = x^2$. Dan krijgen we

$$t^2 - r^2 t + 4 = 0 \tag{4}$$

hetgeen een kwadratische vergelijking is in t met discriminant

$$D = r^4 - 16.$$

Als $r < 2$ dan is $D < 0$ en er zijn dan geen reële oplossingen van (4). Als $r \geq 2$ dan is $D \geq 0$ en we vinden de oplossingen

$$t = \frac{1}{2}\left(r^2 \pm \sqrt{D}\right) = \frac{1}{2}\left(r^2 \pm \sqrt{r^4 - 16}\right).$$

Dit geeft twee mogelijkheden voor $t = x^2$ en deze zijn allebei positief (want $0 \leq D = \sqrt{r^4 - 16} < \sqrt{r^4} = r^2$). Voor x krijgen we vier mogelijkheden, namelijk

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}\left(r^2 + \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{1/2},$$
$$x_2 = -\left(\frac{1}{2}\left(r^2 + \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{1/2},$$
$$x_3 = \left(\frac{1}{2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{1/2},$$
$$x_4 = -\left(\frac{1}{2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{1/2}.$$

De bijbehorende waarde van y is steeds $1/x$. Dus

$$y_1 = \left(\frac{1}{2}\left(r^2 + \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{-1/2},$$
$$y_2 = -\left(\frac{1}{2}\left(r^2 + \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{-1/2},$$
$$y_3 = \left(\frac{1}{2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{-1/2},$$
$$y_4 = -\left(\frac{1}{2}\left(r^2 - \sqrt{r^4 - 16}\right)\right)^{-1/2},$$

en de oplossingen zijn

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad (x_4, y_4). \tag{5}$$

In het geval dat $r \geq 2$ worden de oplossingen gegeven door (3) samen met (5).

(c) Als $r < 2$ dan zijn (3) de enige reële oplossingen. Dit zijn er twee.

Als $r = 2$ dan is $D = r^4 - 16 = 0$ en dan geldt er dat $x_1 = x_3 = \sqrt{2}$ en $x_2 = x_4 = -\sqrt{2}$. Er zijn dan maar twee verschillende oplossingen in (5). Samen met de oplossingen (3) zijn er voor $r = 2$ dus vier verschillende reële oplossingen. Voor $r = 2$ zijn er samenvallende oplossingen in (5). Dit betekent precies dat de ellips raakt aan de hyperbool en dit is de situatie in de figuur van onderdeel (a).

Als $r > 2$ dan zijn de waarden x_1, x_2, x_3 en x_4 onderling verschillend. Er zijn dan vier verschillende oplossingen in (5). Samen met de oplossingen uit (3) zijn er dan uiteindelijk zes verschillende reële oplossingen.

Samenvattend:

- Als $r < 2$ dan zijn er twee oplossingen.
- Als $r = 2$ dan zijn er vier oplossingen.
- Als $r > 2$ dan zijn er zes oplossingen.