Modeloplossing tussentijdse toets Wiskunde I 2012

Vraag 1 (a) Splits $\dfrac{1-x}{x(x^2+1)}$ in partieelbreuken.

(b) In een elektrisch circuit met een vaste weerstand R en een variabele weerstand x voldoen de elektrische spanning V en de stroomsterkte I aan de wet van Ohm

$$V = I(R+x).$$

De warmteontwikkeling y bij de variabele weerstand voldoet aan

$$y = I^2 x.$$

We nemen aan dat V en R constant zijn. Voor welke waarde van $x > 0$ is y dan maximaal?

Antwoord:

1 (a) Omdat x^2+1 geen reële nulpunten heeft zoeken we een splitsing van de vorm

$$\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

We brengen de rechterkant op gelijke noemer:

$$\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

De teller $(A+B)x^2+Cx+A$ moet gelijk zijn aan $1-x$. Dit geeft volgende vergelijkingen

$$\begin{cases} A = 1 \\ C = -1 \\ A+B = 0 \end{cases}$$

met als oplossing $A = 1$, $B = -1$ en $C = -1$. Bijgevolg is

$$\frac{1-x}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

1 (b) Vermits $I = \dfrac{V}{R+x}$ kunnen we y schrijven als een functie van x (met $x > 0$):

$$y = I^2x = \frac{V^2}{(R+x)^2}x = V^2\frac{x}{(R+x)^2}.$$

We berekenen de afgeleide met de quotiëntregel:

$$\frac{dy}{dx} = V^2\left(\frac{1\cdot(R+x)^2 - 2(R+x)\cdot x}{(R+x)^4}\right) = V^2\left(\frac{R+x-2x}{(R+x)^3}\right) = V^2\frac{R-x}{(R+x)^3}.$$

De afgeleide $\dfrac{dy}{dx}$ is nul voor $x = R$. We onderzoeken nu of in dit stationair punt een maximum bereikt wordt. Vermits $V^2 > 0$, $R > 0$ en $x > 0$, dus $(R+x)^3 > 0$ wordt het tekenverloop van $\dfrac{dy}{dx}$ bepaald door de factor $(R-x)$. We vinden

x	0		R	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	max	$\searrow$

We kunnen dus besluiten dat y maximaal is voor $x = R$.

Vraag 2 We beschouwen de functie

$$f(x) = xe^x.$$

(a) Voor elke $n \geq 1$ geldt dat de $n$de afgeleide van f gelijk is aan

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (x + n)e^x.$$

Bewijs dit met behulp van volledige inductie.

(b) Bereken de derdegraads Taylorveelterm van $f(x)$ rond het punt $x = 0$.

(c) Bereken de integraal

$$\int_{-\infty}^{0} |f'(x)| dx$$

zonder gebruik te maken van partiële integratie.

Antwoord:

2 (a) **Basisstap:** In de basisstap nemen we $n = 1$ en we zien dat we moeten bewijzen dat

$$\frac{d}{dx} f(x) = (x + 1)e^x.$$

Dit is eenvoudig te verifiëren met de productregel voor afgeleiden:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1)e^x.$$

Inductiestap: In de inductiehypothese nemen we $k \geq 1$ en we veronderstellen dat $\frac{d^k}{dx^k} f(x) = (x+k)e^x$ geldt. We gaan dit gebruiken om te laten zien dat $\frac{d^{(k+1)}}{dx^{(k+1)}} f(x) = (x + k + 1)e^x$ geldt. Volgens de definitie van hogere orde afgeleide is

$$\frac{d^{(k+1)}}{dx^{(k+1)}} f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right)$$

Hierin vervangen we $\frac{d^k}{dx^k} f(x)$ door $(x + k)e^x$. Dit mag, want we hebben aangenomen dat ze gelijk zijn. Dus

$$\frac{d^{(k+1)}}{dx^{(k+1)}} f(x) = \frac{d}{dx} \left((x + k)e^x\right).$$

Vervolgens gebruiken we de productregel voor afgeleiden

$$\begin{aligned} \frac{d^{(k+1)}}{dx^{(k+1)}} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}(x + k) \right) \cdot e^x + (x + k) \cdot \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \\ &= 1 \cdot e^x + (x + k)e^x = (x + k + 1)e^x. \end{aligned}$$

Hiermee is de inductiestap bewezen.

Conclusie: Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn, geldt $\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (x+n)e^x$ voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$, vanwege het principe van volldige inductie.

2 (b) Uit (a) weten we dat

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \\ f'(x) &= (x+1)e^x \\ f''(x) &= (x+2)e^x \\ f'''(x) &= (x+3)e^x \end{aligned}$$

Dus $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ en $f'''(0) = 3$. De Taylorveelterm van graad 3 van f rond $x = 0$ is

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

In dit geval wordt dit dus

$$P_3(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3.$$

2 (c) Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{0} |f'(x)|\, dx &= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 |f'(x)|\, dx = \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 |(x+1)e^x|\, dx \\ &= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 |x+1| e^x\, dx \end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruikten dat $e^x > 0$.

Er geldt $|x+1| = x+1$ als $x > -1$ en $|x+1| = -(x+1)$ als $x < -1$. We nemen $b < -1$ en we splitsen de integraal op als volgt

$$\begin{aligned} \int_b^0 |x+1|e^x\, dx &= \int_b^{-1} |x+1|e^x\, dx + \int_{-1}^0 |x+1|e^x\, dx \\ &= -\int_b^{-1} (x+1)e^x\, dx + \int_{-1}^0 (x+1)e^x\, dx. \end{aligned}$$

Hierin vervangen we $(x+1)e^x$ weer door $f'(x)$

$$\int_b^0 |f'(x)|\, dx = -\int_b^{-1} f'(x)\, dx + \int_{-1}^0 f'(x)\, dx. \tag{1}$$

We passen de tweede vorm van de hoofdstelling van de integraalrekening toe, waarbij we opmerken dat f een primitieve functie van f' is. Dan is

$$\begin{aligned} \int_b^{-1} f'(x)\, dx &= [f(x)]_b^{-1} = f(-1) - f(b) \\ \int_{-1}^0 f'(x)\, dx &= [f(x)]_{-1}^0 = f(0) - f(-1) \end{aligned}$$

We vullen dit in in formule (1) en er volgt

$$\int_b^0 |f'(x)| dx = -(f(-1) - f(b)) + (f(0) - f(-1)) = f(0) - 2f(-1) + f(b).$$

Uit $f(x) = xe^x$ volgt

$$f(0) = 0, \qquad f(-1) = -e^{-1}, \qquad f(b) = be^b.$$

Bijgevolg is

$$\int_b^0 |f'(x)|\, dx = 2e^{-1} + be^b.$$

Tenslotte nemen we de limiet $b \to -\infty$. Dan $be^b \to 0$. Dit is een standaardlimiet, maar ze volgt ook uit de tweede regel van de l'Hôpital. Schrijf be^b als $\dfrac{b}{e^{-b}}$ dan worden teller en noemer oneindig als $b \to -\infty$. Dan

$$\lim_{b \to -\infty} \frac{b}{e^{-b}} = \lim_{b \to -\infty} \frac{1}{-e^{-b}} = \lim_{b \to -\infty} \left(-e^b\right) = 0.$$

Het eindresultaat is dat

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |f'(x)|\, dx &= \lim_{b \to -\infty} \int_b^0 |f'(x)|\, dx = \lim_{b \to -\infty} \left(2e^{-1} + be^b\right) \\ &= 2e^{-1} = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Ter controle kun je opmerken dat $|f'(x)|$ een positieve functie is, en dat de integraal dus zeker een positief getal moet zijn. Dat is inderdaad het geval.