Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
woensdag 6 november 2013, 8:30–10:15 uur
auditorium 200C Aud A en 200 C Aud B

Naam:

Studierichting:

Naam van assistent:

(Liebrecht De Sadeleer of Niels Meesschaert)

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \tag{1}$$
geldt voor alle deelverzamelingen A en B van X.

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat
$$\forall A \in P(X) : \forall B \in P(X) : \ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$
als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 In deze opgave is $f : X \to Y$ een functie en is R een equivalentierelatie op X.

We definiëren de relatie S op Y door

$$S = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y \mid \exists x_1 \in f^{-1}(y_1) : \exists x_2 \in f^{-1}(y_2) : (x_1, x_2) \in R\}.$$

(a) Is S reflexief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(b) Is S symmetrisch? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(c) Is S transitief? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 De rij van getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ wordt gedefinieerd door $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ en

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_{n+1} + \frac{2}{a_n}\right).$$

Dus

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{2}{a_0}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(a_2 + \frac{2}{a_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{1}\right) = \frac{7}{4},$$

enzovoorts.

Bewijs met volledige inductie dat $1 \leq a_n \leq 2$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.