Tussentijdse toets
Bewijzen en Redeneren
5 november 2014
Modeloplossing

Vraag 1 Beschouw de bewering over een verzameling X:

$$\forall x \in X : \exists A \in P(X) : A \neq \emptyset \Rightarrow \neg(x \in A)$$

(a) Geef de ontkenning van de bewering in een vorm waarbij $\neg$ en $\Rightarrow$ niet gebruikt worden.

(b) Is de bewering waar voor elke verzameling X? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Antwoord:
(a) De ontkenning is

$$\exists x \in X : \forall A \in P(X) : A \neq \emptyset \wedge x \in A$$

(b) De bewering is waar voor elke verzameling X. Het bewijs is als volgt.
Neem $x \in X$ willekeurig. We kiezen $A = \emptyset$. Dan is de implicatie

$$A \neq \emptyset \Rightarrow \neg(x \in A)$$

juist, omdat de premisse $A \neq \emptyset$ niet waar is.

Opmerking: De bewering op zich is niet interessant, maar het is belangrijk dat je met logische concepten (kwantoren, implicaties, negatie, ...) kunt omgaan.

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \quad A \subset f^{-1}(f(A)). \tag{1}$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat gelijkheid in (1) niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \quad A = f^{-1}(f(A)).$$

als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) Kies $A \in P(X)$ willekeurig. Neem $x \in A$ willekeurig. Dan geldt $f(x) \in f(A)$. Vanwege de definitie van invers beeld, is dan $x \in f^{-1}(f(A))$. Omdat $x \in A$ willekeurig gekozen was, volgt nu dat $A \subset f^{-1}(f(A))$. Omdat $A \in P(X)$ willekeurig gekozen was, geldt de uitspraak (1).

(b) Er zijn veel mogelijke voorbeelden. Uit onderdeel (c) blijkt dat de functie f niet injectief moet zijn.

Neem bv. $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$ en $f : X \to Y$ met $f(1) = a$ en $f(2) = a$. Kies $A = \{1\}$. Dan is $f(A) = \{f(1)\} = Y$ en $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(Y) = X = \{1, 2\}$. In dit voorbeeld is het duidelijk dat $A \neq f^{-1}(f(A))$. Gelijkheid geldt dus zeker niet altijd.

(c) Om de equivalentie te bewijzen, bewijzen we twee implicaties.

Bewijs dat $(\forall A \in P(X) : \ A = f^{-1}(f(A))) \quad \Rightarrow \quad f$ **is injectief**

Neem aan dat $\forall A \in P(X) : \ A = f^{-1}(f(A))$.

Om te bewijzen dat f injectief is, nemen we $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$. We moeten bewijzen dat $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Neem $A = \{x_2\}$. Uit de aanname volgt dat $A = f^{-1}(f(A))$. Omdat $x_1 \neq x_2$, is $x_1 \notin A$ en bijgevolg $x_1 \notin f^{-1}(f(A))$. Dit betekent dat $f(x_1) \notin f(A) = f(\{x_2\}) = \{f(x_2)\}$, en dus $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Omdat x_1 en x_2 met $x_1 \neq x_2$ willekeurig gekozen waren, volgt hieruit dat f injectief is. De ene implicatie is bewezen.

Bewijs dat f is injectief $\Rightarrow$ $(\forall A \in P(X): \; A = f^{-1}(f(A)))$

Neem nu aan dat f injectief is.

Kies $A \in P(X)$ willekeurig. In onderdeel (a) hebben we al bewezen dat $A \subset f^{-1}(f(A))$. We gaan nu de andere inclusie bewijzen.

Neem $x \in f^{-1}(f(A))$ willekeurig. Dit betekent dat $f(x) \in f(A)$. Uit de definitie van $f(A)$ volgt nu dat er een $a \in A$ is met $f(x) = f(a)$. Omdat f injectief is, volgt $x = a$. Omdat $a \in A$ volgt dus dat $x \in A$. Omdat $x \in f^{-1}(f(A))$ willekeurig gekozen was, hebben we de inclusie $f^{-1}(f(A)) \subset A$ bewezen.

Zoals reeds gezegd, geldt de andere inclusie altijd vanwege onderdeel (a). Dus $A = f^{-1}(f(A))$ geldt voor elke $A \in P(X)$. Hiermee is ook de tweede implicatie bewezen.

Conclusie: Omdat de twee implicaties bewezen zijn, geldt de equivalentie $(\forall A \in P(X): \; A = f^{-1}(f(A))) \;\Leftrightarrow\; f$ is injectief.

Vraag 3 X is een verzameling.

We definiëren een relatie R op de verzameling $\mathrm{Fun}(X,X)$ van alle functies van X naar X door $(f,g) \in R$ als en slechts als er een bijectie $\sigma : X \to X$ bestaat met

$$f \circ \sigma = \sigma \circ g$$

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X,X)$ is. Hierbij mag u algemene eigenschappen van bijecties gebruiken zonder bewijs, maar u moet deze eigenschappen wel vermelden.

(b) Neem $X = \{1,2,3\}$ en $f,g \in \mathrm{Fun}(X,X)$ gegeven door

$$f(1) = 1, \qquad f(2) = 1, \qquad f(3) = 2,$$

$$g(1) = 1, \qquad g(2) = 2, \qquad g(3) = 1.$$

Behoren f en g tot dezelfde equivalentieklasse van R ? Beargumenteer uw antwoord.

Antwoord:

(a) We bewijzen dat R reflexief, symmetrisch en transitief is.

Bewijs dat R reflexief is Neem $f \in \mathrm{Fun}(X,X)$ willekeurig. De eenheidsfunctie 1_X is een bijectie van X naar X en er geldt $f \circ 1_X = f$ en $1_X \circ f = f$. Bijgevolg is $f \circ 1_X = 1_X \circ f$ en hieruit volgt dat $(f,f) \in R$.

Omdat f willekeurig was gekozen, is hiermee bewezen dat R reflexief is.

Bewijs dat R symmetrisch is Neem $f,g \in \mathrm{Fun}(X,X)$ willekeurig met $(f,g) \in R$. Er is dan een bijectie $\sigma : X \to X$ met $f \circ \sigma = \sigma \circ g$. De inverse functie σ^{-1} is ook een bijectie van X naar X. Er volgt als we de gelijkheid $f \circ \sigma = \sigma \circ g$ links en rechts samenstellen met σ^{-1}, dat

$$\sigma^{-1} \circ (f \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ (\sigma \circ g) \circ \sigma^{-1}.$$

We gebruiken nu de associativiteit van de samenstelling en het feit dat σ^{-1} de inverse van σ is. Dit leidt tot $\sigma^{-1} \circ f = g \circ \sigma^{-1}$, ofwel

$$g \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ f.$$

Hieruit volgt dat $(g,f) \in R$.

Omdat f en g met $(f,g) \in R$ willekeurig was gekozen, is hiermee bewezen dat R symmetrisch is.

Bewijs dat R transitief is Neem $f, g, h \in \mathrm{Fun}(X, X)$ willekeurig met $(f, g) \in R$ en $(g, h) \in R$. Er zijn dan bijecties σ en τ van X naar X zodanig dat $f \circ \sigma = \sigma \circ g$ en $g \circ \tau = \tau \circ h$. Dan geldt, waarbij we een aantal keren de associativiteit van de samenstelling gebruiken,

$$\begin{aligned} f \circ (\sigma \circ \tau) &= (f \circ \sigma) \circ \tau \\ &= (\sigma \circ g) \circ \tau \\ &= \sigma \circ (g \circ \tau) \\ &= \sigma \circ (\tau \circ h) \\ &= (\sigma \circ \tau) \circ h \end{aligned}$$

Omdat $\sigma \circ \tau$ een bijectie is, volgt hieruit dat $(f, h) \in R$.

(b) De functies f en g behoren tot dezelfde equivalentieklasse als en slechts als $(f, g) \in R$. Dat wil dus zeggen als en slechts als er een bijectie σ is met $f \circ \sigma = \sigma \circ g$.

We bewijzen dat er geen bijectie σ is met $f \circ \sigma = \sigma \circ g$ en we doen dit uit het ongerijmde.

Stel dat σ een bijectie is met $f \circ \sigma = \sigma \circ g$. Dan geldt $f(\sigma(x)) = \sigma(g(x))$ voor elke $x \in X$. Vanwege de definitie van g vinden we hieruit

$$f(\sigma(1)) = \sigma(1), \qquad f(\sigma(2)) = \sigma(2), \qquad f(\sigma(3)) = \sigma(1).$$

We zien dat zowel $x = \sigma(1)$ als $x = \sigma(2)$ voldoen aan $f(x) = x$. Uit de definitie van f is het duidelijk dat er maar één $x \in X$ is met $f(x) = x$, namelijk $x = 1$. Er volgt dus dat $\sigma(1) = 1$ en $\sigma(2) = 1$. Maar dan is σ niet injectief en dus zeker geen bijectie. Dit is een tegenspraak.

Er is dus geen bijectie σ met $f \circ \sigma = \sigma \circ g$. Dan zijn f en g niet equivalent volgens de equivalentierelatie R en ze behoren dus niet tot dezelfde equivalentieklasse.