Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
woensdag 4 november 2015, 8:30–10:15 uur

Fysica: auditorium 200C Aud B
Wiskunde: auditorium 200 C Aud A

Naam:

Studierichting:

Naam van assistent:

(Assistenten zijn Liebrecht De Sadeleer en Dries Stivigny)

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en redeneren:
  - Bij 15 op 30: 1 punt bonus
  - Bij 20 op 30: 1,5 punt bonus
  - Bij 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : [[\forall k \in \mathbb{N} : k \geq m \implies a_k > a_m] \land a_m < a_n]$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) (a_n) is een rij van getallen die voldoet aan $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ en

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Gebruik volledig inductie om te bewijzen dat

$$a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord:

(a) De ontkenning is

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N} : [[\exists k \in \mathbb{N} : k \geq m \land a_k \leq a_m] \lor a_m \geq a_n]$$

(b) We gebruiken volledige inductie.

Basisstap In de basisstap controleren we de bewering voor $n = 0$ en $n = 1$. Voor $n = 0$ is de bewering dat $a_0 \leq 1$ en dit is juist want $a_0 = 1$. Voor $n = 1$ is de bewering dat $a_1 \leq \frac{5}{2}$ en dit is juist want $a_1 = 2$.

Inductiestap Neem $k \in \mathbb{N}_0$ en neem aan dat de bewering juist is voor k en voor $k-1$. Er geldt dus dat $a_k \leq \left(\frac{5}{2}\right)^k$ en $a_{k-1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}$. Dan is

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2a_k + a_{k-1} \\ &\leq 2\left(\frac{5}{2}\right)^k + \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(2 + \frac{2}{5}\right) \end{aligned}$$

Het is makkelijk in te zien dat

$$2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \leq \frac{5}{2}.$$

Immers $\frac{12}{5} = 2.4$ en $\frac{5}{2} = 2.5$. Bijgevolg is

$$a_{k+1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}$$

en dit betekent dat de bewering waar is voor $k+1$.

Conclusie Omdat de basisstap en de inductiestap bewezen zijn volgt nu dat $a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$ geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$, vanwege het principe van volledige inductie.

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat
$$\forall B \in P(Y): \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat de andere inclusie
$$B \subset f(f^{-1}(B))$$
niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat
$$\forall B \in P(Y): \quad f(f^{-1}(B)) = B$$
geldt als en slechts als f surjectief is.

Antwoord:

(a) Neem een willekeurige deelverzameling B van Y.

Neem $y \in f(f^{-1}(B))$ willekeurig. Dan is er een $x \in f^{-1}(B)$ met $y = f(x)$. Omdat $x \in f^{-1}(B)$ geldt vanwege de definitie van invers beeld dat $f(x) \in B$. Omdat $y = f(x)$ volgt nu dat $y \in B$. Dit bewijst dat $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Onderdeel (a) is hiermee bewezen.

(b) Er zijn heel wat voorbeelden te geven. Een eenvoudig voorbeeld is $X = \{a\}$, $Y = \{0, 1\}$ en $f : X \to Y$ met $f(a) = 0$. Neem dan $B = \{1\}$. Omdat 1 niet optreedt als beeld van f is $f^{-1}(B) = \emptyset$ en dan is ook $f(f^{-1})(B) = \emptyset$. Omdat B niet-leeg is, geldt de inclusie $B \subset f(f^{-1}(B))$ duidelijk niet.

(c) We moeten twee implicaties bewijzen, namelijk
$$\big[\forall B \in P(Y): \quad f(f^{-1}(B)) = B\big] \implies f \text{ is surjectief} \tag{1}$$
en
$$f \text{ is surjectief} \implies \big[\forall B \in P(Y): \quad f(f^{-1}(B)) = B\big] \tag{2}$$

Bewijs van (1) Neem dus aan dat $\forall B \in P(Y) : \quad f(f^{-1}(B)) = B$. Om te bewijzen dat f surjectief is, kiezen we $y \in Y$ willekeurig en we gaan laten zien dat er een $x \in X$ bestaat met $y = f(x)$.

We nemen de verzameling $B = Y$. Uit onze veronderstelling volgt dat $f(f-1(Y)) = Y$. Omdat $y \in Y$ is dan ook $y \in f(f^{-1}(Y))$. Vanwege de definitie van het beeld $f(A)$ van een deelverzameling A van X, geldt dan dat $y = f(x)$ voor zekere $x \in f^{-1}(Y)$. Dan zeker ook $x \in X$ en dus treedt y op als beeld van een element uit X.

Bijgevolg is f surjectief en de implicatie (1) is bewezen.

Bewijs van (2) Neem nu aan dat f surjectief is. Neem $B \in P(Y)$ willekeurig. De inclusie $f(f^{-1}(B) \subset B$ is reeds in onderdeel (a) bewezen. We gaan nu ook de andere inclusie bewijzen.

Neem daartoe $y \in B$ willekeurig. Omdat f surjectief is, is er een $x \in X$ met $y = f(x)$. Dan is $f(x) \in B$ en vanwege de definitie van invers beeld is dan $x \in f^{-1}(B)$. Omdat $y = f(x)$ volgt dan dat $y \in f(f^{-1}(B))$. Omdat $y \in B$ willekeurig gekozen was volgt nu dat $B \subset f(f^{-1}(B))$.

Zoals al opgemerkt is de andere inclusie algemeen geldig (zoals volgt uit onderdeel (a)). Bijgevolgt geldt $B = f(f^{-1}(B)$.

De implicatie (2) is nu ook bewezen.

Beide implicaties (1) en (2) gelden dus. De twee uitspraken zijn dus equivalent en onderdeel (c) is volledig bewezen.

Naam:

Vraag 3 Zij X een verzameling. Voor twee functies $f : X \to X$ en $g : X \to X$ definiëren we de "verschilverzameling" door

$$V(f,g) = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

We definiëren vervolgens een relatie R op de verzameling $\mathrm{Fun}(X,X)$ van alle functies van X naar X door $(f,g) \in R$ als en slechts als $V(f,g)$ een aftelbare verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X,X)$ is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er in het geval dat X aftelbaar oneindig is? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel?

Opmerking: Algemene eigenschappen van aftelbare verzameling mag u zonder bewijs gebruiken. U moet wel duidelijk formuleren welke eigenschap u gebruikt.

Antwoord:

(a) We controleren reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit.

Reflexief: Neem $f \in \mathrm{Fun}(X,X)$ willekeurig. Omdat

$$V(f,f) = \{x \in X \mid f(x) \neq f(x)\} = \emptyset,$$

is de verzameling $V(f,f)$ zeker een aftelbare verzameling. Dus $(f,f) \in R$. Omdat f willekeurig gekozen was, volgt dat de relatie R reflexief is.

Symmetrisch: Neem $f, g \in \mathrm{Fun}(X,X)$ willekeurig en veronderstel dat $(f,g) \in R$. Dan is $V(f,g)$ dus een aftelbare verzameling. Het is eenvoudig in te zien dat

$$V(f,g) = V(g,f).$$

Bijgevolg is $V(g,f)$ ook een aftelbare verzameling en dus is $(g,f) \in R$. Omdat f en g willekeurig gekozen waren is nu bewezen dat de relatie R symmetrisch is.

Transitief: Neem $f, g, h \in \mathrm{Fun}(X, X)$ willekeurig en veronderstel dat $(f, g) \in R$ en $(g, h) \in R$. Dan zijn $V(f, g)$ en $V(g, h)$ dus aftelbare verzamelingen.

We bewijzen nu eerst dat

$$V(f, h) \subset V(f, g) \cup V(g, h). \tag{3}$$

Neem $x \in V(f, h)$ willekeurig. Dan geldt dus $f(x) \neq h(x)$. Dan zeker $f(x) \neq g(x)$ of $g(x) \neq h(x)$. Immers als $f(x) = g(x)$ en $g(x) = h(x)$, dan zou volgen $f(x) = h(x)$. In het geval dat $f(x) \neq g(x)$ krijgen we dat $x \in V(f, g)$ en in het geval dat $g(x) \neq h(x)$ krijgen we dat $x \in V(g, h)$. Een van deze mogelijkheden is zeker het geval en dus is $x \in V(f, g) \cup V(g, h)$. De inclusie (3) is hiermee bewezen.

Omdat $V(f, g)$ en $V(g, h)$ aftelbare verzamelingen zijn, is ook $V(f, g) \cup V(g, h)$ een aftelbare verzameling. Dan is vanwege (3) $V(f, h)$ een deelverzameling van een aftelbare verzameling, en bijgevolg ook aftelbaar. Volgens de definitie van R is dan $(f, h) \in R$.

Omdat f, g en h willekeurig gekozen waren is de transitiviteit bewezen.

We hebben gebruik gemaakt van de volgende twee algemeen geldende eigenschappen van aftelbare verzamelingen die we hier als lemmas formuleren (maar niet bewijzen):

Lemma 3.1 *Als A en B aftelbare verzamelingen zijn dan is $A \cup B$ ook aftelbaar.*

Lemma 3.2 *Als C een aftelbare verzameling is en $D \subset C$ dan is D ook een aftelbare verzameling.*

(b) Neem aan dat X aftelbaar oneindig is. Voor elk tweetal $f, g \in \mathrm{Fun}(X, X)$ is

$$V(f, g) \subset X$$

en omdat X aftelbaar is, is $V(f, g)$ dan ook aftelbaar. We gebruiken hierbij nogmaals Lemma 3.2 van hierboven.

Dus $(f, g) \in R$ geldt voor elke $f, g \in \mathrm{Fun}(X, X)$. Alle functies in $\mathrm{Fun}(X, X)$ zijn dus met elkaar equivalent volgens de equivalentierelatie R. Er is dan maar één equivalentieklasse, namelijk $\mathrm{Fun}(X, X)$ zelf.

Het aantal equivalentieklassen is dus eindig (namelijk slechts één)!!!