Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
woensdag 4 november 2015, 8:30–10:15 uur

Fysica: auditorium 200C Aud B
Wiskunde: auditorium 200 C Aud A

Naam:

Studierichting:

Naam van assistent:

(Assistenten zijn Liebrecht De Sadeleer en Dries Stivigny)

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en redeneren:
  - Bij 15 op 30: 1 punt bonus
  - Bij 20 op 30: 1,5 punt bonus
  - Bij 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reëele getallen

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : [[\forall k \in \mathbb{N} : k \geq m \implies a_k > a_m] \wedge a_m < a_n]$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

(b) (a_n) is een rij van getallen die voldoet aan $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ en

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \qquad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Gebruik volledig inductie om te bewijzen dat

$$a_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Antwoord:

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Bewijs dat

$$\forall B \in P(Y) : \quad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

(b) Laat door middel van een voorbeeld zien dat de andere inclusie

$$B \subset f(f^{-1}(B))$$

niet altijd hoeft te gelden.

(c) Bewijs dat

$$\forall B \in P(Y) : \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

geldt als en slechts als f surjectief is.

Antwoord:

Naam:

Vraag 3 Zij X een verzameling. Voor twee functies $f : X \to X$ en $g : X \to X$ definiëren we de "verschilverzameling" door

$$V(f, g) = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

We definiëren vervolgens een relatie R op de verzameling $\mathrm{Fun}(X, X)$ van alle functies van X naar X door $(f, g) \in R$ als en slechts als $V(f, g)$ een aftelbare verzameling is.

(a) Bewijs dat R een equivalentierelatie op $\mathrm{Fun}(X, X)$ is.

(b) Hoeveel equivalentieklassen van R zijn er in het geval dat X aftelbaar oneindig is? Zijn het er eindig veel, aftelbaar oneindig veel, of overaftelbaar veel?

Opmerking: Algemene eigenschappen van aftelbare verzameling mag u zonder bewijs gebruiken. U moet wel duidelijk formuleren welke eigenschap u gebruikt.

Antwoord: