Tussentijdse Toets Bewijzen en Redeneren

1ste fase Fysica en Wiskunde
maandag 30 oktober 2017, 16:30–18:00 uur

Fysica: auditorium 200M.00.07
Wiskunde + TWIN: auditorium 200 C Aud A

Naam:

Studierichting:

Naam van assistent:

(Assistenten zijn Niels Bonneux, Tobe Deprez, Marco Stevens en Jonas Wahl)

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- De toets bestaat uit 3 vragen. Begin het antwoord op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Puntenverdeling per vraag:

  Vraag 1: 6 pt

  Vraag 2: (a) 4 pt (b) 8 pt

  Vraag 3: 12 pt

- Als u de toets voldoende maakt, behaalt u een bonus voor het examen van Bewijzen en redeneren:
  - Bij 15 op 30: 1 punt bonus
  - Bij 20 op 30: 1,5 punt bonus
  - Bij 25 op 30: 2 punten bonus
- Succes!

Naam:

Vraag 1 Geef de ontkenning van de volgende bewering over een rij (a_n) van reële getallen

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : [a_n > 1 \implies \forall m > n : |a_n - a_m| > \varepsilon] \, .$$

Schrijf de ontkenning in een vorm waarbij $\neg$ en $\implies$ niet voorkomen.

Antwoord:

De ontkenning is

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : [a_n > 1 \ \wedge \ \exists m > n : |a_n - a_m| \leq \varepsilon] \, .$$

Naam:

Vraag 2 Zij $f : X \to Y$ een functie.

(a) Laat door middel van een voorbeeld zien dat

$$\forall A \in P(X) : \, f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$$

niet altijd hoeft te gelden.

(b) Bewijs dat

$$\forall A \in P(X) : \, f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$$

geldt als en slechts als f injectief is.

Antwoord:

(a) Een mogelijk voorbeeld is het volgende. Neem $X = \{1, 2\}$, $Y = \{5, 6\}$ en $f : X \to Y$ met $f(1) = f(2) = 5$. We nemen verder $A = \{2\}$. Dan is $X \setminus A = \{1\}$ en

$$f(X \setminus A) = f(\{1\}) = \{f(1)\} = \{5\}$$

terwijl $f(A) = \{f(2)\} = \{5\}$ zodat

$$Y \setminus f(A) = \{5, 6\} \setminus \{5\} = \{6\}.$$

Uiteraard is $\{5\}$ geen deelverzameling van $\{6\}$ en dus geldt in dit voorbeeld dat $f(X \setminus A)$ geen deelverzameling is van $Y \setminus f(A)$.

Andere voorbeelden zijn uiteraard ook mogelijk. In je voorbeeld zul je een functie f moeten geven die niet injectief is. Je verzameling A zal zodanig moeten zijn dat $x_1 \in A$ en $x_2 \notin A$ voor zekere $x_1, x_2 \in X$ met $x_1 \neq x_2$ en $f(x_1) = f(x_2)$. Zulke x_1 en x_2 bestaan omdat f niet injectief is.

(b) We moeten twee implicaties bewijzen.

Bewijs dat $\forall A \in P(X) : \, f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A) \implies f$ **is injectief.**

We nemen aan dat $\forall A \in P(X) : \, f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ geldt. Om te bewijzen dat f injectief is, nemen we $x_1, x_2 \in X$ willekeurig met $x_1 \neq x_2$. We gaan laten zien dat $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Neem dus $x_1, x_2 \in X$ willkeurig met $x_1 \neq x_2$. We kiezen $A = \{x_1\}$. Vanwege onze aanname is dan

$$f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A). \tag{1}$$

Omdat $x_2 \in X \setminus A$, geldt $f(x_2) \in f(X \setminus A)$. Vanwege (1) is dus $f(x_2) \in Y \setminus f(A)$, hetgeen wil zeggen dat $f(x_2) \notin f(A)$.

Omdat $x_1 \in A$ is $f(x_1) \in f(A)$. We hebben nu dat $f(x_1) \in f(A)$ terwijl $f(x_2) \notin f(A)$. Dan is het zeker dat $f(x_1) \neq f(x_2)$. De injectiviteit van f is hiermee bewezen.

Bewijs dat $\quad f$ **is injectief** $\implies \forall A \in P(X) : f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$

We nemen nu aan dat f injectief is. Neem $A \in P(X)$ willekeurig. Om te bewijzen dat $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ kiezen we vervolgens $y \in f(X \setminus A)$ willekeurig. Dan is er een $x \in X \setminus A$ met $y = f(x)$.

We willen laten zien dat $y \in Y \setminus f(A)$ en we doen dit uit het ongerijmde. Neem aan dat $y \in f(A)$. Dan is er een $a \in A$ met $y = f(a)$. Dan hebben we $y = f(x)$ en $y = f(a)$. Omdat f injectief is, volgt hieruit dat $x = a$. Er geldt echter $x \in X \setminus A$ en $a \in A$ en dit is een tegenspraak. We concluderen dat $y \in Y \setminus f(A)$.

Omdat $y \in f(X \setminus A)$ willekeurig gekozen was geldt $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$.

$A \in P(X)$ was ook willekeurig gekozen, en bijgevolg geldt $\forall A \in P(X) : f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$. De tweede implicatie is nu ook bewezen.

Conclusie Beide implicaties zijn nu bewijzen. Hieruit volgt dat de twee beweringen equivalent zijn en onderdeel (b) is bewezen.

Naam:

Vraag 3 Veronderstel dat R een equivalentierelatie is op een verzameling X. Bewijs dat dan geldt

$$R \circ R^{-1} = R.$$

Maak in je bewijs duidelijk welke eigenschappen van een equivalentierelatie (reflexief, symmetrisch, transitief) je precies gebruikt.

Antwoord:
We gaan twee inclusies bewijzen.

Bewijs van $R \circ R^{-1} \subset R$

Neem $(x, y) \in R \circ R^{-1}$ willekeurig.

Uit de definitie van de samenstelling van relaties, volgt dat er dan een $z \in X$ bestaat met $(x, z) \in R^{-1}$ en $(z, y) \in R$. Uit de definitie van inverse relatie volgt dan dat $(z, x) \in R$.

De relatie R is **symmetrisch** en dus volgt $(x, z) \in R$. Uit $(x, z) \in R$ en $(z, y) \in R$ volgt, vanwege de **transitiviteit** van R dat $(x, y) \in R$.

Omdat $(x, y) \in R \circ R^{-1}$ willekeurig gekozen was, is nu bewezen dat $R \circ R^{-1} \subset R$.

Bewijs van $R \subset R \circ R^{-1}$

Neem $(x, y) \in R$ willekeurig.

We moeten een $z \in X$ zien te vinden met $(x, z) \in R^{-1}$ en $(z, y) \in R$. Immers in dat geval kunnen we concluderen dat $(x, y) \in R \circ R^{-1}$, en dit is wat we willen.

We nemen $z = x$.[1] Er geldt $(x, x) \in R$ want R is **reflexief**. Dan ook $(x, x) \in R^{-1}$, hetgeen meteen volgt uit de definitie van R^{-1}. Dan hebben we dus $(x, x) \in R^{-1}$ en $(x, y) \in R$. Uit de definitie van de samenstelling van relaties volgt nu dat $(x, y) \in R \circ R^{-1}$.

Omdat $(x, y) \in R$ willekeurig gekozen was, is de andere inclusie nu ook bewezen.

Conclusie Beide inclusies zijn nu bewezen en daaruit volgt de gevraagde gelijkheid.

[1] De keuze $z = y$ gaat ook werken.